高等学校教材

整数与多项式

冯克勤　余红兵　编著

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目(CIP)数据

整数与多项式 / 冯克勤，余红兵 编著．— 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999

ISBN 7-04-007890-2

Ⅰ．整… Ⅱ．① 冯… ② 余… Ⅲ．① 整数 ② 多项式 Ⅳ．0121.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 41499 号

书　　名 整数与多项式
作　　者 冯克勤　余红兵

出版发行 高等教育出版社　施普林格出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街 55 号　**邮政编码** 100009
电　　话 010－64054588　**传　　真** 010－64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京民族印刷厂

开　　本 880×1230　1/32　**版　　次** 1999 年 10 月第 1 版
印　　张 6.5　**印　　次** 1999 年 10 月第 1 次印刷
字　　数 190 000　**定　　价** 15.00 元

©China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg 1999

版权所有　侵权必究

序

整数(论),也称为初等数论,主要研究整数性质和方程(组)的整数解;多项式,则是代数学中一个非常基本的研究对象.

整数和多项式,初看起来,彼此并不相同,但两者有许多共同的,以及可以类比的内容.特别地,整数和多项式中许多概念、结果和方法,是近世代数中抽象概念的非常基本的模型和源泉.此外,由于计算机科学和数字通信技术的飞速进步,包括数论和代数学在内的广义离散数学得到了广泛和深入的应用.无论培养数学研究人材,还是培养数学应用人材,大学的数论和代数教学都应当有所加强.

中国科学技术大学从 1977 年起为数学系一年级学生开设了初等数论必修基础课.本书是在二十余年教学经验基础上,由原讲义改写而成.编写本书主要有两个目的:一个是较为系统地讲授整数和多项式理论的基本知识;另一个是为学习近世代数(群、环、域)提供具体的素材和实例,所以书中比较注重培养学生的代数学观点,表现整数理论与多项式理论的联系和相似之处.根据教学实践,我们相信,这样作对于培养学生抽象思考能力和代数学的思想方法,都是有好处的.

本书的主体为两个部分.第一部分的五章(共十四节)讲述整数的基础知识;第二部分的四章(共十二节)讲述多项式;另有一章作为附录,简要介绍本书内容在数字通信的信息安全方面的一些应用.根据以往的经验,作为一学期每周三(或四)学时的教材内容,可删去第 14 节,第 18 节和第 23 节不讲.

本书中每一节都配有少量的习题,其中较为基本的则标有“*”号.书末给出了部分习题的提示和注释,供读者参考.

作者感谢中国科学技术大学数学系的程艺教授、李尚志教授对编写本书的支持和鼓励；感谢单墫教授、李克正教授对本书写作提出的建议；感谢高等教育出版社徐可先生对本书出版的大力帮助；最后，我们感谢余华敏小姐耐心地打印了本书的初稿.

作　者

一九九九年五月

目　　录

引　言 …… (1)

第一部分　整　　数

第一章　数的整除性 …… (11)
§1. 整除 …… (11)
§2. 最大公约数与最小公倍数 …… (15)
§3. 唯一分解定理 …… (22)

第二章　同　　余 …… (30)
§4. 同余式与同余类 …… (30)
§5. 同余类的运算 …… (37)
§6. 欧拉—费马定理 …… (41)
§7. 同余方程(组) …… (47)

第三章　原根和指数 …… (56)
§8. 原根 …… (56)
§9. 指数 …… (63)

第四章　二次剩余 …… (68)
§10. 二次剩余 …… (68)
§11. 二次互反律 …… (76)

第五章 不定方程 …… (84)
§12. 不定方程与同余方程 …… (84)
§13. 费马方程 …… (88)
§14. 两整数的平方和 …… (93)

第二部分 多 项 式

第六章 域上的一元多项式 …… (101)
§15. 带余除法与最大公因式 …… (101)
§16. 唯一分解定理 …… (110)
§17. 多项式的零点 …… (115)
§18. 多项式的同余式 …… (120)

第七章 代数基本定理 …… (125)
§19. 代数基本定理 …… (125)
§20. 单位根 …… (129)

第八章 整系数多项式 …… (134)
§21. 本原多项式与唯一分解 …… (134)
§22. 不可约多项式 …… (138)
§23. 分圆多项式 …… (143)

第九章 多元多项式 …… (148)
§24. 唯一分解与恒等定理 …… (148)
§25. 齐次多项式与对称多项式 …… (154)
§26. 对称多项式基本定理 …… (159)

附录 应用举例 …… (167)
1. 公开密钥体制 …… (167)

2. 数字签名 …… (171)
3. 密钥分配与共享 …… (174)

部分习题提示和注释 …… (179)

引　言

1. 正整数与整数. 正整数，也叫作自然数，就是我们熟知的

$$1, 2, 3, \cdots.$$

正整数的集合记作 $\mathbf{N}$. 正整数的形成源于经验，其公理化定义是由皮亚诺(Peano) 作出的，这里不作讨论. 我们只提及(没有证明) 正整数的一些基本性质.

正整数中可以作**加法运算**：对任意 $a, b \in \mathbf{N}$，有唯一确定的正整数，称为 a 与 b 的和，记作 $a+b$，具有下面的运算规律

(1) 加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(2) 加法交换律　$a+b=b+a$.

正整数中还可作**乘法运算**：对任意 $a, b \in \mathbf{N}$，有唯一确定的正整数，称为 a 与 b 的积，记作 $a \cdot b$(或 ab)，具有下面的运算规律

(3) 乘法结合律　$(ab) \cdot c=a \cdot (bc)$；

(4) 乘法交换律　$ab=ba$；

(5) $1 \cdot a=a \cdot 1=a$；

(6) 分配律　$a(b+c)=ab+ac$.

正整数中有**大小**(即顺序) 关系. 如果 $a=b+c(c \in \mathbf{N})$，则记作 $a>b$ 或 $b<a$. 可以证明，对任意两个数 a, b，三个关系

(7) $a<b$,　$a=b$,　$a>b$

中,有且仅有一个成立;并且

(8) 由 $a < b, b < c$ 推出 $a < c$;

(9) 由 $a < b$ 推出 $a + c < b + c$;

(10) 由 $a < b$ 推出 $ac < bc$.

正整数的最重要,最本质的性质是下面的

归纳公理 设 $S \subseteq \mathbf{N}$,满足条件(i) $1 \in S$; (ii) 如果 $n \in S$,则 $n + 1 \in S$. 那么 $S = \mathbf{N}$.

归纳公理是我们常用的数学归纳法的基础.

定理 1 设 $P(n)$ 是关于正整数的一个命题. 如果

(i) 当 $n = 1$ 时,$P(1)$ 成立;

(ii) 由 $P(n)$ 成立可推出 $P(n + 1)$ 成立.

则 $P(n)$ 对所有正整数 n 都成立.

由归纳公理还可推出正整数的下面两个非常基本的性质:

定理 2(最小数原理) 设 T 是 $\mathbf{N}$ 的一个非空子集. 则必有 $t_0 \in T$,使得对任意 $t \in T$ 有 $t_0 \leqslant t$,即 t_0 是 T 中的最小正整数.

定理 3(最大数原理) 设 T 是 $\mathbf{N}$ 的一个非空子集. 若 T 有上界,即存在正整数 m,使得对任意 $t \in T$ 有 $t \leqslant m$. 那么,必有 $t_0 \in T$,使得对任意 $t \in T$ 有 $t \leqslant t_0$,即 t_0 是 T 中的最大正整数.

用最小数原理可以证明下面的第二数学归纳法.

定理 4 设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题. 如果

(i) 当 $n = 1$ 时,$P(1)$ 成立;

(ii) 设 $n > 1$，由 $P(k)$ 对所有正整数 $k < n$ 成立，可推出 $P(n)$ 成立.

则 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立.

通过引入记号 0(零) 及 $-a$ 可将正整数扩充为整数. 整数的集合记作 $\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Z}$ 上可定义加法与乘法. 对于加法，它适合运算规律(1)，(2)；并且，数 0 满足 $0+a=a+0=a$；以及，对每个 $a \in \mathbf{Z}$ 有唯一的 $x \in \mathbf{Z}$，使 $a+x=0$，将 x 记作 $-a$. 于是，对任意 $a,b \in \mathbf{Z}$，方程 $a+x=b$ 在 $\mathbf{Z}$ 中有唯一的解，这个解记作 $b-a$，即 $\mathbf{Z}$ 中可以作加法的逆运算——减法. 在代数学中，我们将可作加、减运算，并且适合上述运算规律的集合称为**加法群**. 因此，$\mathbf{Z}$ 是一个加法群.

$\mathbf{Z}$ 中的乘法适合运算规律(3)，(4)，(5)，(6). 我们将既能作加、减运算，还能作上述乘法运算的集合，称为(**交换**) **环**. 注意，对于乘法，$0 \cdot a = 0$；并且 $ab=0$ 当且仅当 $a=0$ 或者 $b=0$. 具有这种性质的环，称作**无零因子环**. 因此 $\mathbf{Z}$ 是一个无零因子环，从而其中(乘法) 消去律成立.(我们在第二章中将遇到与此不同的环.)

整数中也有**大小**(顺序) 的概念，它适合规律(7)，(8)，(9) 以及(10) 当 $c > 0$.

整数中还引入了**绝对值**的概念：

$$|a| = \begin{cases} a, & a \in \mathbf{N}, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & -a \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

因此，$|a|$ 总是一个非负整数. 绝对值有下面的性质：

(11) $|ab| = |a||b|$，

(12) (三角不等式)　$|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

现在我们简短地提一下有理数、实数和复数的代数结构.

有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,它是所有分数 $\frac{a}{b}$ 之集,其中 $a,b \in \mathbf{Z}$ 且 $b \neq 0$. 两个有理数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 相等,等价于说 $ad = bc$. 由 $a = \frac{a}{1}$,可将整数 $\mathbf{Z}$ 看作 $\mathbf{Q}$ 的子集. 易于知道,对每个 $a \in \mathbf{Z}, a \neq 0, a$ 在 $\mathbf{Q}$ 中均有唯一的(乘法)"逆",即存在唯一的 $r \in \mathbf{Q}$,使 $ra = 1$;并且 $\mathbf{Q}$ 是包含 $\mathbf{Z}$ 且具有这一性质的最小集合.

实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 通常我们将 $\mathbf{R}$ 看作所有十进小数的集合,因而 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集. 定义实数的一种方式是将其作为有理数的柯西(Cauchy)序列的极限,我们对此不作讨论. 然而,没有精确定义仍然可以使用实数,本书将像我们在初等数学中做过的那样对待实数.(历史上,实数也的确是在使用了几百年后,才给出了精确的定义.)

复数的集合记作 $\mathbf{C}$,它们由所有形如 $a + b\mathrm{i}$ 的数构成,这里 $a,b \in \mathbf{R}$,而 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 复数的实部、虚部、共轭、模、三角形式,以及几何意义等,都已在中学里学习过,这里不再讨论,我们只提及一个基本的等式(称为**欧拉**(Euler)**公式**):

$$r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

其中 r,θ 分别是复数的模及幅角,而 e 是自然对数的底.

与 $\mathbf{Z}$ 类似,$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 中可作加、减法与乘法,并且具有 $\mathbf{Z}$ 中相同的运算规律. 于是,$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 都是环.

但从代数观点看,$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{Z}$ 有很大的不同. 在 $\mathbf{Z}$ 中,方程 $ax = 1$ 仅在 $a = 1$ 或 -1 时可解;但在 $\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中,每一个非零元均有(乘法)"逆",即可以作除法运算. 用代数的语言,能作加,减,乘,除(分母不为零)四则运算(并且满足通常运算规律)的集合,称为**域**. 于是,$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 都是域,但 $\mathbf{Z}$ 不是域. 此外,$\mathbf{Q}$ 中每个元都是 $\mathbf{Z}$ 中两个元素之商,我们因此将 $\mathbf{Q}$ 称为 $\mathbf{Z}$ 的商域;又 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$,我们说 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的扩域,$\mathbf{C}$ 是 $\mathbf{R}$ 的扩域.

2. **多项式**. 我们用 D 代表 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 设 n 是非负整数,表达式

(13)　$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 属于 D，称为**系数在 D 中的一元多项式**，也可称为 D 上的一元多项式. 所有形如(13)的多项式的集合，记作 $D[x]$.

在微积分中，我们常将(13)称为多项式函数，即 x 视为 D 中的变量. 但在代数学中，我们将采用不同的观点，(13)中的 x 称为**不定元**——并非是 D 中不确定的元素，而仅是一个不属于 D 的形式符号，我们约定 x 与 D 中元素的(形式)运算适合 D 中元素的运算规律. 我们常用 $f(x),g(x),\cdots$ 或 $f,g,\cdots$ 等来代表多项式.

在多项式(13)中，a_ix^i 称为 **i 次项**，a_i 称为 i 次项的**系数**. 两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ **相等**(或恒等)，记作 $f(x)=g(x)$，是指 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中同次项的系数相等. 系数全为零的多项式称为**零多项式**，简称零，记为 0.

在(13)中，如果 $a_n\neq 0$，则称 a_nx^n 为多项式(13)的**首项**，a_n 为**首项系数**，n 为多项式(13)的**次数**，记作 $n=\deg f(x)$，这通常简记为 $n=\deg f$.（多项式的次数与不定元的选取无关.）请注意，零次多项式即为 D 中非零元素，而零多项式是唯一不定义次数的多项式.

$D[x]$ 中的多项式可作加、减、乘法运算. 设

(14)　$$f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

(15)　$$g(x)=b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0,$$

是 $D[x]$ 中两个多项式. 在表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和时，如 $n\geqslant m$，为了方便起见，我们令 $b_n=\cdots=b_{m+1}=0$. 定义

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0+b_0).$$

易于验证，多项式的加法满足结合律与交换律(因为这些均归结为系数 a_i,b_i 的加法). 零多项式在 $D[x]$ 中加法的作用相当于数 0 在 D 中加法的作用：$0+f(x)=f(x)$. 此外，对任意 $f(x)$，我们将其每一项的系数改变符号得到的多项式，记作 $-f(x)$，则 $f(x)+(-f(x))=0$. 定义

$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$，于是 $D[x]$ 中可作减法运算.

$D[x]$ 中还可以作乘法. 设 $f(x)$，$g(x)$ 如(14)，(15) 式，定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积为

$$f(x)\cdot g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,$$

其中 k 次项的系数是 $\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$.

同样易于验证，$D[x]$ 中的乘法满足结合律，交换律与分配律(因这也归结为 D 中元素的加法与乘法运算). 多项式 1 在 $D[x]$ 中乘法的作用相当与数 1 在 D 中乘法的作用：$1\cdot f(x)=f(x)$.

因此，$D[x]$ 对(上面定义的) 加法与乘法形成一个交换环，我们称之为 **D 上的一元多项式环**.

最后，我们简要地介绍一下 D 上的多元多项式. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个不定元，形如

$$ax_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

的式子，称为一个 n 元**单项式**，其中系数 $a\in D$，$i_1,\cdots,i_n$ 为非负整数，而 $x_1^{i_1},\cdots,x_n^{i_n}$ 允许交换次序. 如果两个单项式中相同不定元的幂次均相等，则称它们为**同类项**. 有限个(不同类的)单项式的(形式)和

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},\quad a_{i_1\cdots i_n}\in D,$$

称为 **系数在 D 中的 n 元多项式**，也称为 D 上的 n 元多项式. D 上所有 n 元多项式的集合记作 $D[x_1,\cdots,x_n]$. 我们常用 $F(x_1,\cdots,x_n)$，$G(x_1,\cdots,x_n)$，$\cdots$ 或 $F,G,\cdots$ 等来代表 n 元多项式.

各个单项式的系数都是零的多项式，称为 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中**零多项式**，简称零，记作 0. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $G(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个多项式，如果 F 与 G 中的单项式一一对应地为系数相等的同类项，则称 F 与 G **相等**(或恒等)，记作 $F=G$.

$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中可定义加、减、乘法运算.

对 $F,G\in D[x_1,\cdots,x_n]$,F 与 G 的和,记作 $F+G$,是 D 上唯一确定的多项式,其中的项是 F 与 G 的诸单项式的和(将两者的同类项"合并"—— 就是将系数相加). 此外,对于任意的 $F\in D[x_1,\cdots,x_n]$,改变其诸单项式的符号所得的多项式,记作 $-F$,并定义

$$F-G=F+(-G),$$

于是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中可作减法运算.

$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个单项式

$$ax_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\quad 与\quad bx_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$$

的积定义为 $abx_1^{i_1+j_1}\cdots x_n^{i_n+j_n}$;对任意 $F,G\in D[x_1,\cdots,x_n]$,F 与 G 的积,记作 FG,是 D 上唯一确定的多项式,其中的项是 F 与 G 中诸单项式两两(如上) 乘积之和.

易于验证,$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的多元多项式,对于上述定义的加、减、乘法运算,满足与 $D[x]$ 中运算相同的运算规律,因此是一个交换环,我们称之为 **D 上的多元多项式环**.

第一部分

整　　数

第一章　数的整除性

§1. 整　　除

我们知道，整数集合中除了加法和乘法之外还可作减法运算，并且这些运算满足一些规律（见引言），但是一般不能作除法，也就是说，如 a,b 是整数，$b\neq 0$，则 $\frac{a}{b}$ 不一定是整数，即不一定存在整数 c 使 $a=bc$. 由此引出初等数论中第一个基本概念：数的整除性.

设 a 和 b 是整数，$b\neq 0$. 如果存在整数 c 使得 $a=bc$，则称 b **整除** a，表示成 $b|a$，并称 b 是 a 的一个**约数**（或**因子**），而 a 为 b 的**倍数**. 如果不存在上述的整数 c，则称 b **不整除** a，表示成 $b\nmid a$ ①.

由整除的定义，立即导出整除的如下的基本性质.

定理 1　设 a,b,c 是整数.

(i) 如 $b|a$，且 $c\neq 0$，则 $bc|ac$. 反之亦然，特别地，$b|a$ 等价于 $(\pm b)|(\pm a)$；

(ii) 如 $b|c$ 且 $c|a$，则 $b|a$；

(iii) 如 $b|a$ 且 $b|c$，则 a,c 的任意整系数线性组合均是 b 的倍数，即对任意整数 x,y 有 $b|(ax+cy)$；

(iv) 如 $b|a$ 且 $a\neq 0$，则 $|b|\leqslant|a|$；于是，如 $b|a$ 且 $a|b$，则 $|a|=|b|$.

现在我们给出整数的一个非常基本的性质.

---

① 国标规定不整除符号用“$\nmid$”表示，本书为排印方便，用“$\nmid$”表示.

定理 2（带余除法） 设 a,b 为整数，$b \neq 0$，则存在整数 q,r，使得

$$a = bq + r, \quad 其中 \quad 0 \leqslant r < |b|; \tag{1}$$

并且整数 q,r 由上述条件唯一决定.

证明　当 $b|a$ 时，可取 $r = 0$，$q = \dfrac{b}{a}$. 当 $b \nmid a$ 时，我们考虑集合

$$E = \{a - bk \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

易知，E 中有正整数，因此 E 中有最小正整数，设为

$$r = a - bq > 0.$$

我们证明必有 $r < |b|$. 因现在 $b \nmid a$，故 $r \neq |b|$. 若 $r > |b|$，则 $r' = r - |b| > 0$；又 $r' \in E$，这与 r 的最小性矛盾. 于是我们作出了形如(1)的表示.

现在证明表示的唯一性. 假设

$$a = bq_1 + r_1, \quad 其中 \quad 0 \leqslant r_1 < |b|.$$

结合(1)有

$$b(q - q_1) + (r - r_1) = 0.$$

由此推出 $b|(r - r_1)$. 但

$$0 \leqslant |r - r_1| < |b|,$$

故必须 $r - r_1 = 0$，即 $r = r_1$（参考定理 1(iv)），从而

$$q = q_1.$$

注记　1. 等式(1)中的整数 q 称为 a 被 b 除的（不完全）**商**，数 r 叫做 a 被 b 除得的**余数**. $r = 0$ 的情形即为 a 被 b 整除.

2. 定理 1 的核心是关于余数 r 的不等式. 论证的主要步骤是选取余数，这依赖于（正整数集合的）最小数原理. 为应用这一原理，我们首先证明所考虑的（整数）集合中有正整数，进而可从中选取最小正整数. 本书中许多地方均采用这一手法.

作为带余除法的例子，我们看到，整数被 2 除的余数有两个可能值：0 和 1. 一个整数被 2 整除则称为偶数，否则称为奇数. 因此偶数可表示为 $2k$，而奇数为 $2k+1$（k 是整数）.

类似地，整数被 3 除的余数为 0，1，2. 因此任一整数可表示为 $3k$，$3k+1$，$3k+2$ 三种形式之一.

定理 3　设 S 是 $\mathbf{Z}$ 的一个（非空）子集，对减法运算封闭，即对任意 $x,y\in S$ 有 $x-y\in S$.

则存在唯一的整数 $d\geqslant 0$，使得 S 是由 d 的所有倍数构成，即

$$S=d\mathbf{Z}=\{da\mid a\in\mathbf{Z}\}.$$

证明　我们首先注意，$0\in S$；以及，如 $x\in S$，则

$$-x=0-x\in S.$$

因此对任意 $x,y\in S$，

$$y+x=y-(-x)\in S,$$

所以 S 对加法运算也封闭. 进而由归纳法易证，对任意 $x\in S$ 及 $n\in\mathbf{Z}$ 有 $nx\in S$. 从而，S 中元素的任意整系数线性组合仍在 S 中.

现在我们证明定理. 如果 $S=\{0\}$，则结论显然成立（取 $d=0$）. 如 S 中有非零元，则其中必有正整数，从而有最小正整数 d. 显然，d 的所有倍数均属于 S. 另一方面，对任意 $x\in S$，由定理 2，我们可表示为 $x=dq+r$，其中 $0\leqslant r<d$；显然 $r=x-dq\in S$. 由于 d 的最小性，必须有 $r=0$，于是 $x=dq$. 因此 $S=d\mathbf{Z}$. 最后，因 d 是集合中最小正整数，它由（给定的）S 唯一确定.

注记　用代数的语言，满足定理 3 中条件的子集称为 $\mathbf{Z}$ 的理想，而对任意整数 d，理想 $d\mathbf{Z}$ 由一个元素 d“生成”，称为主理想，也常记作 (d). 定理 3 表明，$\mathbf{Z}$ 中每个理想都是主理想，我们因此称 $\mathbf{Z}$ 为主理想（整）环.

习　题　1

1*. 设 a,b 为整数，$a \neq b$，n 是正整数，则 $(a-b)\mid(a^n-b^n)$.

2*. 设 a,b 是整数 $a+b \neq 0$，n 是正奇数，则 $(a+b)\mid(a^n+b^n)$.

3*. 设 n 是奇数，则 $8\mid(n^2-1)$.

4. (i) 设 n 是整数，证明：$6\mid n^3-n$；

(ii) 设 $a_1,\cdots,a_k$ 是整数，$a_1+\cdots+a_k$ 被 6 整除，则 $a_1^3+\cdots+a_k^3$ 也被 6 整除.

5. 设 $n>1$ 是奇数，证明：$(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})(n-1)!$ 被 n 整除.

6. 设 m,n 为正整数，$m>2$. 证明：$2^m-1 \nmid 2^n+1$.

7*. 对任意实数 x，定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，即整数 $[x]$ 满足 $x-1<[x]\leqslant x$.

证明：$1,2,\cdots,n$ 中恰有 $[\frac{n}{k}]$ 个数被 k 整除，这里 n,k 均是正整数.

8*. 证明：当 $b>0$ 时，定理 2 中的整数 q 可表示为 $q=[\frac{a}{b}]$；并在 $b<0$ 时给出 q 的类似表达式.

9*. 设整数 $q>1$. 证明

(i) 每个正整数 n 可唯一地表示为

$$n=a_kq^k+\cdots+a_1q+a_0,$$

其中 a_i 是满足 $0\leqslant a_i\leqslant q-1$ 的整数 $(0\leqslant i\leqslant k)$，而 $a_k\neq 0$. 这一表达式称为 n 的 **q 进制表示**，数 a_i 称为 q 进制表示中的数码；

(ii) $a_i=[\frac{n}{q^i}]-[\frac{n}{q^{i+1}}]$，$0\leqslant i\leqslant k$.

10*. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为实数，证明

$$[\alpha_1]+\cdots+[\alpha_n]\leqslant[\alpha_1+\cdots+\alpha_n]\leqslant[\alpha_1]+\cdots+[\alpha_n]+n-1.$$

11. 设 α,β 为实数，证明：

$$[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta].$$

12*. 设 x 是实数，$n\geqslant 2$ 为整数，证明

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx].$$

§2. 最大公约数与最小公倍数

设 $a,b,\cdots,c$ 是(有限个)不全为零的整数，满足下面两个条件的(唯一的)整数 d 称为它们的**最大公约数**，记作 $(a,b,\cdots,c)$：

(i) d 是 $a,b,\cdots,c$ 的公(共)约数，即 $d|a,d|b,\cdots,d|c$；

(ii) d 是 $a,b,\cdots,c$ 的所有公约数中最大的，即如果整数 d_1 也是 $a,b,\cdots,c$ 的公约数，则 $d_1\leqslant d$.

我们注意，任意整数 $a,b,\cdots,c$ 必然有公约数(例如 ± 1). 如果它们不全为零，则易见它们的公约数只有有限多个(参考 §1，定理 1(iv))，所以它们的最大公约数必然存在并且是唯一的. 此外，如 d 是 $a,b,\cdots,c$ 的公约数，则 $-d$ 也是它们的公约数，从而最大公约数一定是正整数.

如果 $(a,b,\cdots,c)=1$，则称 $a,b,\cdots,c$ 是**互素**的；换句话说，$a,b,\cdots,c$ 是互素的，指它们的公约数只有 ± 1.

如果数 $a,b,\cdots,c$ 中任意两个是互素的，则称 $a,b,\cdots,c$ **两两互素**. 明显地，两两互素的数一定也互素(但反之不然)；而对于两个数而言，互素与两两互素的概念是一样的.

最大公约数有下面的简单的性质：

定理 1　(i) 任意改变 $a,b,\cdots,c$ 的符号不变 $(a,b,\cdots,c)$ 的值；

(ii) 任意交换 $(a,b,\cdots,c)$ 中两个字母的位置不变其值；

(iii) 设 $a\neq 0$，则 $(a,a,\cdots,a)=|a|$；

(iv) $(a,b,\cdots,c)$ 作为 $b,\cdots,c$ 的函数均以 a 为周期，即

$$(a,b,\cdots,c)=(a,b+a,\cdots,c)=\cdots=(a,b,\cdots,c+a). \quad (1)$$

一般地，对任意整数 $x,\cdots,y$，有

$$(a,b,\cdots,c)=(a,b+ax,\cdots,c+ay). \tag{2}$$

证明　(i)，(ii)，(iii)均可以从定义看出来. 对于(iv)，我们设

$$d=(a,b,\cdots,c),\quad d'=(a,b+a,\cdots,c),$$

则 $a,b,\cdots,c$ 均被 d 整除，从而 $a,a+b,\cdots,c$ 被 d 整除，故 $d\leqslant d'$；同样地，$d'\leqslant d$. 因此 $d=d'$. 再由(ii)可得出(1)中其余等式. (2)可以反复用(1)及性质(i)推出来.

下面的定理 2 是我们建立最大公约数性质的基础.

定理 2　设 $a,b,\cdots,c$ 是不全为零的整数，则 $a,b,\cdots,c$ 的整线性组合

$$ax+by+\cdots+cz$$

(系数 $x,y,\cdots,z$ 是任意整数)的集合，恰由 $(a,b,\cdots,c)$ 的所有倍数构成.

证明　将 §1，定理 3 应用于集合

$$S=\{ax+by+\cdots+cz\mid x,y,\cdots,z\in\mathbf{Z}\},$$

便推出了 $S=D\mathbf{Z}$，这里 D 是 S 中最小正数(注意现在 $S\neq\{0\}$). 记 $d=(a,b,\cdots,c)$，下面证明 $D=d$.

首先，由于 $D\in S$，故有整数 $x,y,\cdots,z$，使 $D=ax+by+\cdots+cz$. 因 $d\mid a,d\mid b,\cdots,d\mid c$，故

$$d\mid(ax+by+\cdots+cz)(\text{参考 §1，定理 1(iii)}),$$

即 $d\mid D$. 注意 d,D 均正数，故特别地有 $d\leqslant D$(§1，定理 1(iv)). 另一方面，因(显然)$a,b,\cdots,c$ 均属于 S，故它们都是 D 的倍数，即 D 是 $a,b,\cdots,c$ 的公约数，从而 $D\leqslant d$. 综合上述两方面，便证明了 $d=D$.

推论　设$a,b,\cdots,c$是不全为零的整数，则存在整数$x,y,\cdots,z$，使得

$$ax+by+\cdots+cz=(a,b,\cdots,c).$$

这一等式称为**裴蜀(Bezout)等式**. 特别地，如$a,b,\cdots,c$互素，则存在整数$x,y,\cdots,z$，使

$$ax+by+\cdots+cz=1; \tag{3}$$

并且，(3)有整数解$x,y,\cdots,z$也是$a,b,\cdots,c$互素的充分条件.

现在我们能够给出最大公约数的一些基本性质.

定理 3　(i) $a,b,\cdots,c$的每一个公约数都是它们的最大公约数的约数；

(ii) $(a,b,\cdots,c)=((a,b),\cdots,c)$；

(iii) 设m为正整数，则

$$(ma,mb,\cdots,mc)=m(a,b,\cdots,c);$$

(iv) 设$(a,b,\cdots,c)=d$，则$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d},\cdots,\frac{c}{d}\right)=1$；

(v) 设$(a,m)=(b,m)=1$，则$(ab,m)=1$. 一般地，如果若干个整数均与m互素，则它们的积也与m互素；

(vi) 如$c|ab$且$(c,b)=1$，则$c|a$.

证明　(i) 这是最大公约数最本质的属性，不难由裴蜀等式推出来.

(ii) 设$d=(a,b,\cdots,c)$，$d'=((a,b),\cdots,c)$. 显然d'是$a,b,\cdots,c$的公约数，故$d'\leqslant d$；另一方面，因d整除$a,b,\cdots,c$，故由(i)知$d|(a,b)$，从而d是$(a,b),\cdots,c$的公约数，故$d\leqslant d'$. 综合两方面知$d=d'$.

(iii) 设$d=(a,b,\cdots,c)$，$e=(ma,mb,\cdots,mc)$，我们证明$e=md$. 因md整除$ma,mb,\cdots,mc$，故由(i)知$md|e$. 另一方面，由裴蜀等式，存在整数$x,y,\cdots,z$使$ax+by+\cdots+cz=d$，于是

$$amx + bmy + \cdots + cmz = md,$$

故 $e|md$. 因此 $e = md$.

(iv) 显然 $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \cdots, \frac{c}{d}$ 都是整数. 由(iii)可见

$$d = \left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}, \cdots, d \cdot \frac{c}{d}\right) = d\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \cdots, \frac{c}{d}\right),$$

从而结论成立.

(v) 由 $(a,m) = (b,m) = 1$ 知,存在整数 x,y,x',y' 使得

$$ax + my = 1 \quad 及 \quad bx' + my' = 1.$$

将两式相乘,产生

$$ab(xx') + m(axy' + bx'y + myy') = 1,$$

从而 $(ab,m) = 1$. 一般情形不难用归纳法证明.

(vi) 已知 $c|ab$, 又显然有 $c|ac$. 从而由(i)可知 $c|(ab,ac)$. 但由(iii), $(ab,ac) = |a|(b,c) = |a|$, 于是 $c|a$.

注记　1. 反复用定理 3(ii)可见,求两个以上的整数的最大公约数,化归为求两个整数的最大公约数. 对这一问题,我们有下面的算法:

欧几里德(Euclid)算法　设 a,b 为整数, $b \neq 0$, 按下述方式反复作带余除法(§1,定理 1),有限步之后必然停止(即余数为零):

用 b 除 a:　$a = bq_0 + r_0$,　$0 < r_0 < |b|$;

用 r_0 除 b:　$b = r_0q_1 + r_1$,　$0 < r_1 < r_0$;

用 r_1 除 r_0:　$r_0 = r_1q_2 + r_2$,　$0 < r_2 < r_1$;

$$\vdots$$

用 r_{n-1} 除 r_{n-2}:　$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$,　$0 < r_n < r_{n-1}$;

用 r_n 除 r_{n-1}:　$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$.

则 $(a,b) = r_n$.

事实上,由于诸余数 $r_0, r_1, \cdots$ 为整数,且满足

$$r_0 > r_1 > \cdots > r_{n-1} > \cdots \geqslant 0,$$

从而上述的带余除法有限步后余数必为零. 另一方面,由定理 1(iv),我们有

$$(a,b)=(bq_0+r_0,b)=(b,r_0)=(r_0,r_1)=$$
$$\cdots=(r_{n-1},r_n)=r_n.$$

2. 上面的算法不仅能求 (a,b),还可以实际地求出方程

$$ax+by=(a,b) \tag{4}$$

的一组整数解. 具体的做法是将欧氏算法倒推回去:

由算法中的倒数第二行,得到

$$(a,b)=r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n,$$

这就将 (a,b) 表示成 r_{n-2},r_{n-1} 的整线性组合. 用算法中在其前面的一行 $r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1}$ 代入上式,消去 r_{n-1},得出

$$(a,b)=r_{n-2}(1+q_{n-1}q_n)-r_{n-3}q_n.$$

如此进行,最终便求得方程(4) 的一组整数解 x,y.

最小公倍数是与最大公约数对偶的概念.

设 $a,b,\cdots,c$ 是(有限个) 非零整数,满足下面两个条件的(唯一的)整数 D 称为它们的**最小公倍数**,记作 $[a,b,\cdots,c]$.

(i) D 为正整数,且 D 是 $a,b,\cdots,c$ 的公(共) 倍数,即 $D\geqslant 1$ 且 $a|D$, $b|D,\cdots,c|D$;

(ii) D 是 $a,b,\cdots,c$ 的正公倍数中的最小数,即如果 $D_1\geqslant 1$,使 $a|D_1,b|D_1,\cdots,c|D_1$,则 $D\leqslant D_1$.

定理 4　(i) $a,b,\cdots,c$ 的每个公倍数都是 $[a,b,\cdots,c]$ 的倍数;

(ii) $[a,b,\cdots,c]=[[a,b],\cdots,c]$;

(iii) 设 m 为正整数,则

$$[ma,mb,\cdots,mc]=m[a,b,\cdots,c];$$

(iv) $(a,b)[a,b]=|ab|$;

(v) 如 $a,b,\cdots,c$ 两两互素，则 $[a,b,\cdots,c]=|ab\cdots c|$.

证明　(i) 设 S 是由 $a,b,\cdots,c$ 的所有公倍数构成的集合，则 S 显然满足 §1，定理 3 的条件. 因此 S 恰好是由某个正整数 D 的所有倍数构成的集合，显然 D 必是 S 中最小正整数，从而是 $[a,b,\cdots,c]$. 这立即推出了所说的结论.

(ii) 用(i)像定理 3(ii)那样论证.

(iii) 设 $D=[ma,mb,\cdots,mc]$，$D'=[a,b,\cdots,c]$. 由定义，$ma,mb,\cdots,mc$ 均整除 D，故 $a,b,\cdots,c$ 整除 $\frac{D}{m}$，从而 $D'\leqslant\frac{D}{m}$. 类似地可知 $D\leqslant mD'$. 因此 $D=mD'$.

(iv) 我们可假设 a,b 均为正整数. 首先考虑 $(a,b)=1$ 的情形. 由定义知，有整数 x,y 使

$$ax=[a,b]=by.$$

于是 $b|ax$，但 $(a,b)=1$，从而 $b|x$(定理 3(vi))，因此 $ab|ax$，即 $ab|[a,b]$. 但 ab 是 a 和 b 的公倍数，从而必有 $ab=[a,b]$.

一般情形可化归为上述的特殊情形. 设 $d=(a,b)$，则

$$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1(\text{定理 3(iv)}).$$

于是

$$\left[\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right]=\frac{ab}{d^2}.$$

进而我们导出(利用(iii)及定理 3(iii))

$$\begin{aligned}(a,b)[a,b]&=d\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)\cdot d\left[\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right]\\&=d^2\cdot\frac{ab}{d^2}=ab.\end{aligned}$$

(v) 这可由(ii)，(iv)，定理 3(v)及归纳法推出来.

习　题　2

1. 设 n 是正整数，证明：$\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约分数.

2. 设 n 是正整数，证明：$(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

3. 设 m,n 为正整数，m 是奇数. 证明：$(2^m-1,2^n+1)=1$.

4*. 设 m,n,a 均为正整数，且 $a>1$. 证明

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1.$$

5*. 设 a,b 是不为 0 或 ± 1 的整数. 证明：存在整数 x,y，满足

$$ax+by=(a,b),$$

且 $0<|x|<|b|$，$0<|y|<|a|$.

6*. 给定整数 a,b. 证明：存在整数 x,y,u,v，使得 $a=xu,b=yv$，$(x,y)=1$ 且 $[a,b]=xy$.

7*. 设 m,n 都是正整数且 $(m,n)=1$. 证明

(i) $(d,mn)=(d,m)(d,n)$；

(ii) mn 的任一个正约数 d，可唯一地表示为 $d=d_1d_2$，其中 d_1,d_2 分别是 m,n 的正约数.

8*. 设 n 为正整数，证明

(i) $(a^n,b^n)=(a,b)^n$；

(ii) 设 a,b 是互素的正整数，$ab=c^n$（c 为整数），则 a,b 都是正整数的 n 次方幂. 事实上，$a=(a,c)^n,b=(b,c)^n$.

一般地，如果若干个两两互素的正整数之积是整数的 n 次幂，则这些整数都是 n 次方幂.

9. 设 n 为正整数，k 为正奇数，证明

$$(1+2+\cdots+n)\mid(1^k+2^k+\cdots+n^k).$$

10*. 设 $a,b,\cdots,c$ 是不全为零的整数，则方程

$$ax+by+\cdots+cz=d$$

有整数解 $x,y,\cdots,z$ 的充分必要条件是 $(a,b,\cdots,c)\mid d$.

11*. 设 a,b,c 为整数，$(a,b)\mid c$. 设 $x=x_0,y=y_0$ 是方程

$$ax+by=c \tag{1}$$

的一组整数解(称为方程(1)的**特解**)，则方程(1)的全部整数解(通解)为

$$x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t,$$

$$y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t,$$

其中 t 为任意整数.

12. 用欧氏算法求 963 和 657 的最大公约数，并求出方程

$$963x+657y=(963,657)$$

的一组特解，及所有整数解.

13*. 设 a,b 为正整数且 $(a,b)=1$. 证明：当整数 $n>ab-a-b$ 时，方程

$$ax+by=n \tag{2}$$

有非负的整数解；但当 $n=ab-a-b$ 时，方程(2) 没有非负整数解.

14. 求下列方程的全部整数解：

(i) $x+2y+3z=10$;

(ii) $6x+20y-15z=23$;

(iii) $9x+24y-5z=4$;

(iv) $25x+13y+7z=2$.

§3. 唯一分解定理

设 p 为大于 1 的整数，如果 p 没有真因子，即 p 的正约数只有 1 和 p 自身，则称 p 为**素数**(或质数)，否则称为**合数**(或复合数).

于是，正整数被分成三类：数 1 单独作一类，素数类及合数类.

容易看到，大于 1 的整数至少有一个素因子. 这是因为大于 1 的整数当然有大于 1 的正约数，其中的最小数必是素数.

关于素数最经典的一个结果是公元前 3 世纪欧几里德证明的：

定理 1　素数有无穷多个.

证明　用反证法. 假设素数只有有限多个，设 $p_1,\cdots,p_r$ 是全部素数，考虑 $N=p_1\cdots p_r+1$. 由于 $N>1$，故 N 一定有素约数 p. 由假设 p 必然等于某个 $p_i(1\leqslant i\leqslant r)$，因而 p 整除 $N-p_1\cdots p_k=1$，这不可能. 因此素数有无穷多个.

设 p 为素数，n 是任意整数. 由于 (p,n) 是 p 的正约数，故 $(p,n)=1$ 或 p，即或者 p 与 n 互素，或者 p 整除 n.

定理 2　设 p 是素数，$a,b,\cdots,c$ 是整数. 如果 p 整除乘积 $ab\cdots c$，则 $a,b,\cdots,c$ 中至少有一个被 p 整除.

证明　假如结论不对，则 $a,b,\cdots,c$ 均与 p 互素，从而它们的积也与 p 互素（§2，定理 3(v)），与已知矛盾.

现在我们能够证明整数中最基本的一个结果，它表明素数是整数的“基石”：

定理 3（唯一分解定理）　(i) 每个不等于 1 的正整数均可分解为有限个素数的乘积；

(ii) 如果不计素因数在乘积中的次序，则 (i) 中的分解方式是唯一的.

证明　(i) 我们对 n 归纳. 如果 $n=2$，因 2 是素数，从而结论成立. 假设结论对小于 n 的正整数均成立，现在考虑 n. 如果 n 是素数，则结论

对 n 成立；如果 n 是合数，则 n 有真因子 a，而 $n=ab$（a,b 均是大于 1 的正整数）. 显然 a,b 都小于 n，由归纳假设，a,b 均可分解为有限个素数之积，从而 n 也如此.

(ii) 我们仍对 n 归纳，$n=2$ 时，分解显然是唯一的. 假设结论对小于 n 的正整数均成立，现在考虑 n. 如果 n 有两种方式分解为素数的积：$n=p_1\cdots p_r$ 及 $n=q_1\cdots q_s$，则 p_1 整除 $q_1\cdots q_s$. 由定理 2，素数 p_1 必整除某个 $q_i(1\leqslant i\leqslant s)$，无妨设 $p_1|q_1$. 因 q_1 是素数，故必须 $p_1=q_1$.

令 $n'=\dfrac{n}{p_1}(=\dfrac{n}{q_1})$. 如果 $n'=1$，即 $n=p_1=q_1$，则结论对 n 当然成立. 如 $n'>1$，则因 $n'<n$，对 n' 用归纳假设便推出，$r=s$ 并且 $p_2,\cdots,p_r$ 是 $q_2,\cdots,q_s$ 的一个排列，从而 n 的素因数分解是唯一的.

由定理 3 立即推出，不等于 -1 的负整数，除 ± 1 因子之外，可唯一地分解为素数的乘积. 我们说 $\mathbf{Z}$ 是唯一分解环或具有唯一分解性.

对于不等于 ± 1 的非零整数 n，将其分解中相同的素因子收集在一起，即知 n 可唯一地表示为

$$n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1,\cdots,p_k$ 是互不相同的素数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为正整数，而 $\varepsilon=\pm 1$. 这称为 n 的素因数**标准分解**.

注记 1. 定理 3 的核心是分解的唯一性. 事实上，分解的存在性是素数定义的直接推论，但唯一性却远远不是平凡的. 作为一个说明，大数学家希尔伯特(Hilbert)曾提出过下面的例子：考虑集合

$$S=\{4x+1|x=0,1,2,\cdots\}.$$

显然，S 对乘法运算封闭. 设 $n\in S$ 且 $n\neq 1$，如果 n 不能分解为 S 中两个大于 1 的数之积，则定义 n 为 S 中的“素数”. 于是 5,9,13,17,21 都是 S 中的“素数”，但 25,45 则不是“素数”. 由定义即知，S 中不为 1 的数均可分解成 S 中的“素数”之积.

另一方面，如果 p,q 均是 $4k-1$ 型的素数($p\neq q$)，则 pq,p^2,q^2 都

是 S 中"素数". 但等式

$$(pq)^2 = pq \cdot pq = p^2 \cdot q^2$$

表明，S 中的数 $(pq)^2$ 有两种不同的方式分解为(S 中的)"素数"之积. 由于 $4k-1$ 型的素数有无穷多个(习题 3.5)，故 S 中有无穷多个数，它们分解为"素数"乘积的方式不唯一. 然而，这些数在 S 之外则有唯一的素因数分解(定理 3(ii)).

2. 定理 3(ii) 的证明依靠分解的存在性(定理 3(i)) 及定理 2. 反过来，由定理 3 也能够证明定理 2，即如果素数 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$.

事实上，设 $ab = pc$，并令(我们可设整数 a,b 均大于 1)

$$a = \prod_i p_i, \quad b = \prod_j p_j', \quad c = \prod_k q_k$$

是 a,b,c 的素因数分解(定理 3(i)). 我们有

$$\prod_i p_i \cdot \prod_j p_j' = p \prod_k q_k,$$

因此由定理 3(ii) 推出，p 必然与 p_i 及 p_j' 之一相同，从而 $p|a$ 或者 $p|b$.

由正整数的标准分解，我们容易确定正整数的约数.

推论 1　设 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解，则正整数 d 是 n 的约数的充分必要条件是其标准分解为

$$d = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \cdots, 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k. \tag{1}$$

证明　充分性是显然的. 下面证明必要性. 如 $d = 1$，这是(1) 的形式(所有 $\beta_i = 0$). 如 $d > 1$，则由 $d|n$ 及定理 3 知，d 的素因数必在 $p_1, \cdots, p_k$ 中，所以 d 的标准分解式必为 $d = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$(每个 β_i 为非负整数). 我们来证明 $\beta_i \leqslant \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. 如有一个 $\beta_i > \alpha_i$，无妨设 $i = 1$. 则由 $p_1^{\beta_1}|d$ 及 $d|n$ 推出 $p_1^{\beta_1-\alpha_1}|p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，由此及定理 2 知，$p_1$ 必与 $p_2, \cdots, p_k$ 之一相等，矛盾！因此 d 具有(1)的形式.

推论 2　设 a,b 是正整数，它们的标准分解为

$$a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},\quad b = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k},$$

其中 $p_1,\cdots,p_k$ 是不同的素数. 为了使两个分解式在形式上包含同样的素数，我们允许 α_i,β_i 可取 0，即 α_i 和 β_i 是非负整数($1\leqslant i\leqslant k$). 则

(i) $(a,b) = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$，其中 $a_i = \min(\alpha_i,\beta_i)$；

(ii) $[a,b] = p_1^{b_1}\cdots p_k^{b_k}$，其中 $b_i = \max(\alpha_i,\beta_i)$.

证明　记 $m = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$，则 m 是 a 和 b 的公约数. 另一方面，由推论 1 易证 a 和 b 的任一公约数必整除 m，因此 $m = (a,b)$. 同样可证明 (ii).

注记　1. 多于两个整数的最大公约数与最小公倍数有类似的表达式. 这些公式的价值是在于理论上的 —— 对证明最大公约数与最小公倍数的某些性质非常有用，并非是实际计算的简单工具，因为，一般而言，作出一个整数的标准分解是极其困难的事情.

2. 我们提及(但不作讨论)下面的事实：唯一分解定理能够不用 §1 和 §2 中的准备直接证明；而由此为出发点，像推论 2 那样定义最大公约数与最小公倍数，也可以建立数的整除理论(即证明 §2 中定理 3 和定理 4).

推论 3　设 $n\geqslant 1$，定义**除数函数** $\tau(n)$ 为 n 的正约数的个数；**除数和函数** $\sigma(n)$ 为 n 的正约数之和. 设 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解.

(i) 我们有

$$\tau(n) = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1), \tag{2}$$

及

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}; \tag{3}$$

(ii) 如 $(m,n) = 1$，则有

$$\tau(mn)=\tau(m)\tau(n) \quad 及 \quad \sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n).$$

证明　(i) 公式(2)易由推论 1 导出来;由于 $\tau(1)=1$,故(2) 对 $n=1$ 也成立(看作 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$ 的情形). 为了证明(3),仍用推论 1,我们有

$$\begin{aligned}\sigma(n)&=\sum_{\substack{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\\1\leqslant i\leqslant k}}p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}=\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}p_1^{\beta_1}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\\2\leqslant i\leqslant k}}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}\Big)=\cdots\\&=\Big(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}p_1^{\beta_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}p_k^{\beta_k}\Big)\\&=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.\end{aligned}$$

(ii) 这是(i)的直接推论.(两整数互素,意味着它们的标准分解中没有相同的素因子;反之亦然.) (ii)也可以不用唯一分解定理,而由习题 2.7 推出来.

注记　我们将定义在正整数集上的函数称为**数论函数**,它们的取值通常是整数,但也允许为复数. 设 $f(n)$ 是一个数论函数,如果当 $(m,n)=1$ 时有

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

则称 $f(n)$ 是**积性函数**. 推论 3(ii)表明,除数函数及除数和函数均是积性函数. 很明显,积性函数 $f(n)$ 的值由它在 $n=1$ 及 n 为素数幂处的值决定;又容易看出,如果 $f(n)$ 是一个不恒为零的积性函数,则 $f(1)=1$.

习　题　3

1*. 设 n 为正整数,$n\geqslant 2$. 如果 n 不被不超过 $\sqrt{n}$ 的素数整除,则 n 是素数.

2. 设 $n>1$ 为整数，如果对于任何整数 m，或者 $n|m$ 或者 $(n,m)=1$，则 n 必是素数.

3. 设整数 $n>2$，证明：n 和 $n!$ 之间必有素数. 由此证明素数有无穷多个.

4*. 设整数 $n\geqslant 2$，证明：存在连续 n 个正整数，其中每一个都不是素数.（这表明，在正整数序列中，可以有任意长的一段区间中不包含素数.）

5*. 证明：(i) 形如 $4m+3$ 的素数有无穷多个；

(ii) 形如 $6m+5$ 的素数有无穷多个.

6. 证明：如果 $p,p+2,p+4$ 都是素数，则 $p=3$.

7. 用唯一分解定理证明习题 2.8 的结论.

8. 设整数 $10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1(n>1)$ 是素数，则 n 是素数；但反之不成立.

9*. (i) 设 m 为正整数，证明：如 2^m+1 为素数，则 m 为 2 的方幂；

(ii) 对 $n\geqslant 0$，记 $F_n=2^{2^n}+1$，这称为**费马**(Fermat)**数**. 证明：如 $m>n$，则 $F_n|(F_m-2)$；

(iii) 证明：如 $m\neq n$，则 $(F_m,F_n)=1$. 由此证明素数有无穷多个.

注记　费马数中的素数称为**费马素数**. 例如 $F_0=3$，$F_1=5$，$F_2=17$，$F_3=257$，$F_4=65537$ 都是素数. 费马曾经猜测所有的 F_n 都是素数，但是欧拉在 1732 年证明了 $F_5=641\cdot 6700417$，不是素数. 目前人们不知道是否还有费马素数，更不知道这样的素数是否有无穷多个.

10*. (i) 设 m,n 都是大于 1 的整数，证明：如果 m^n-1 是素数，则 $m=2$ 并且 n 是素数.

(ii) 设 p 是素数，记 $M_p=2^p-1$，这称为**梅森**(Merseme)**数**. 证明：如 p,q 是不同的素数，则 $(M_p,M_q)=1$.

注记　1644 年，法国数学家梅森研究过形如 $M_p=2^p-1$ 的素数，后来人们将这样的素数称为梅森素数，它们与所谓的偶完全数紧密相关（参考习题 3.18）. 到 1996 年底，共找到了 34 个梅森素数. 是否有无穷多个梅森素数，这也是一个未解决的问题.

11. 设 a,b,c,d 是正整数，满足 $ab=cd$. 证明：$a^4+b^4+c^4+d^4$ 不是素数.

12*. 设 n 是正整数，对每个素数 p，我们用 $p^e \| n$ 表示 $p^e | n$ 但 $p^{e+1} \nmid n$. 设 $p^e \| n!$，证明

(i) $e=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$;

(ii) 如 n 的 p 进制表示中数码之和记为 $S_p(n)$（见习题 1.9），则 $e=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$.

13*. 设 $a_1,\cdots,a_k$ 为正整数，证明 $\frac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!}$ 是整数.

14. 设 m,n 为正整数，证明 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

15. 设 a,b 是整数，$a\neq b$，n 是正整数. 如果 $n|(a^n-b^n)$，则 $n\left|\frac{a^n-b^n}{a-b}\right.$.

16*. 设 $n\geqslant 1$. 证明

(i) n 为完全平方数的充分必要条件是 $\tau(n)$ 为奇数；

(ii) $\tau(n)\leqslant 2\sqrt{n}+1$;

(iii) n 的正约数之积等于 $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

17. 证明：(i) $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$;

(ii) $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$.

18*. 正整数 n 称为**完全数**，如果 $\sigma(n)=2n$. 证明：偶数 n 为完全数的充分必要条件是 $n=2^{k-1}(2^k-1)$，且 2^k-1 是素数.

19. 证明：(i) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数 $(n>1)$;

(ii) $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$ 不是整数 $(n>1)$.

第二章　同　　余

§4.　同余式与同余类

设 m 是非零整数，a 和 b 是整数. 如 $m\mid(a-b)$，则称 a 和 b **模 m 同余**(或 a 模 m 同余于 b)，记作

$$a\equiv b \pmod{m}; \tag{1}$$

如果 $m\nmid(a-b)$，则称 a 和 b **模 m 不同余**，记作

$$a\not\equiv b \pmod{m}.$$

关系式(1)称为(模 m 的) **同余式**.

容易看出，a 与 b 模 m 同余的充分必要条件是 a 与 b 被 m 除得相同的余数. 由于同余式(1)等价于 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ (-m))$，故我们可以只考虑 m 为正整数的情形.

对于固定的模 m，同余式与通常的等式有许多类似的性质.

定理 1　同余关系是等价关系，即有

(i) (**自返性**)　$a\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$;

(ii) (**对称性**)　如果 $a\equiv b \pmod{m}$，则 $b\equiv a \pmod{m}$;

(iii) (**传递性**)　如果 $a\equiv b \pmod{m}$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$，则

$$a\equiv c \pmod{m}.$$

证明　(i) 和 (ii) 均是显然的，对于(iii)，由已知及定义，我们有 $m\mid(a-b)$ 及 $m\mid(b-c)$. 从而 $m\mid(a-b)+(b-c)$，即 $m\mid(a-c)$，因此 $a\equiv c \pmod{m}$.

定理 2　如果 $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$，则

(i) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$；

(ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

证明　(i) 是显然的. (ii) 可以从等式

$$ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$$

及已知条件推出来.

反复用定理 1 和定理 2 可推出下面的一般结果.

定理 3　设 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 元整数系数多项式(见引言). 如 $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$F(a_1, \cdots, a_n) \equiv F(b_1, \cdots, b_n) \pmod{m}.$$

下面的定理 4 可看作同余式中的消去律(这是复数中消去律的类似).

定理 4　若

$$ac \equiv bc \pmod{m}. \tag{2}$$

则 $a \equiv b \left(\bmod \dfrac{m}{(c,m)}\right)$. 特别地，当 $(c,m) = 1$ 时，我们有

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

证明　由(2) 知 $m \mid c(a - b)$，这等价于

$$\frac{m}{(c,m)} \left| \frac{c}{(c,m)} (a - b).\right.$$

由 §2，定理 3(iv)及(vi)得出 $\dfrac{m}{(c,m)} \Big| (a - b)$.

现在提及几个涉及模的简单但有用的性质.

定理 5　(i) 如 $a \equiv b \pmod{m}$，$d \mid m$，则 $a \equiv b \pmod{d}$；

(ii) 如 $a \equiv b \pmod{m}$，$d \neq 0$，则 $da \equiv db \pmod{dm}$. 反之亦然；

(iii) 如 $a \equiv b \pmod{m_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $a \equiv b \pmod{[m_1, \cdots, m_n]}$；反之亦然.

证明　(i)，(ii)均是显然的. (iii)的两个方面可分别由(i)及 § 2，定理 4(i)推出来.

设 m 是一个固定的正整数. 由于"模 m 同余"是整数集上的一个等价关系(定理 .)，由此可以将整数按模 m 是否同余分为若干个两两不相交的类，使得同一个类中的任意两个数模 m 同余，而不同类中的两个数模 m 不同余；每一个这样的类称为**模 m 的同余类**. 我们将整数 a 所属的模 m 的同余类记作 $\bar{a} \pmod{m}$，在不引起混淆时可简记为 $\bar{a}$，它由所有模 m 同余于 a 的整数组成，即

$$\bar{a} = \{n \mid n \in \mathbf{Z},\ n \equiv a \pmod{m}\},$$

a 称为它的一个**代表元**. 容易得知，当 $a \equiv b \pmod{m}$ 时有 $\bar{a} = \bar{b}$；否则 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 不相交(即没有公共元素).

由带余除法，任一整数必与 $0, 1, \cdots, m-1$ 中的一个模 m 同余，而 $0, 1, \cdots, m-1$ 彼此模 m 不同余. 因此，模 m 恰有 m 个不同的同余类，它们是 $\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}$. 我们用 $\mathbf{Z}_m$ 表示这 m 个类的集合. (一个类看作一个元素！)

例如，模 2 的同余类共有两个：$\bar{0}, \bar{1}$，前者是全体偶数之集，后者则是所有奇数之集.

如果 $(a, m) = 1$，则由 § 2，定理 1(iv) 易知，同余类 $\bar{a}$ 中每个整数也均与 m 互素，这样的同余类称为模 m 的**缩同余类**. 换句话说，$\bar{a}$ 是(模 m) 缩同余类指的是 $(a, m) = 1$. 我们用 $\mathbf{Z}_m^*$ 表示模 m 的缩同余类组成的集合，其元素个数记作 $\varphi(m)$，称为**欧拉函数**，这是初等数论中一个重要的函数. 显然，$\varphi(1) = 1$，而对 $m > 1$，$\varphi(m)$ 即为 $1, 2, \cdots,$

$m-1$ 中与 m 互素的数的个数.

例如,若 p 是素数,则模 p 共有 $p-1$ 个缩同余类:$\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{p-1}$,从而 $\varphi(p)=p-1$.

m 个整数 $c_1,\cdots,c_m$ 称为**模 m 的完全剩余系**,简称为模 m 的**完系**,是指 $c_1,\cdots,c_m$ 彼此模 m 不同余. 数 $0,1,\cdots,m-1$ 则称为模 m 的**最小非负完系**.

$\varphi(m)$ 个整数 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 称为**模 m 的缩剩余系**,简称为**缩系**,是指它们彼此模 m 不同余,且均与 m 互素. 不超过 m 且与 m 互素的 $\varphi(m)$ 个正整数则叫作模 m 的**最小正缩系**.

于是,$c_1,\cdots,c_m$ 为模 m 的完系,等价于说 $\overline{c}_1,\cdots,\overline{c}_m$ 恰好是模 m 的全部 m 个同余类;而 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的缩系,则等价于说 $\overline{r}_1,\cdots,\overline{r}_{\varphi(m)}$ 恰好是模 m 的全部 $\varphi(m)$ 个缩同余类. 因此,任意两个完(缩)系中的数,将其中一个的顺序适当调整,必然两两模 m 同余.

定理 6　设 $(a,m)=1$,b 是任意整数.

(i) 如 $c_1,\cdots,c_m$ 是模 m 的完系,则 $ac_1+b,\cdots,ac_m+b$ 也是模 m 的完系;

(ii) 如 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的缩系,则 $ar_1,\cdots,ar_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的缩系;

(iii) 存在 x 使 $ax\equiv b\pmod m$ 成立,所有这样的 x 形成模 m 的一个同余类.

证明　(i) $ac_1+b,\cdots,ac_m+b$ 共 m 个数,其中任两数模 m 不同余. 因假如

$$ac_i+b\equiv ac_j+b\pmod m,$$

则有 $ac_i\equiv ac_j\pmod m$. 由于 $(a,m)=1$,故 $c_i\equiv c_j\pmod m$(定理 4),这就证明了结论.

(ii) 由(i)可特别地推出,$\varphi(m)$ 个数 $ar_1,\cdots,ar_{\varphi(m)}$ 中任两个模 m 不同余,又它们均与 m 互素(§2,定理 3(v)),因此(按定义)它们是模 m

的一个缩系.

(iii) 任取模 m 的一个完系 $c_1,\cdots,c_m$,由(i),$ac_1-b,\cdots,ac_m-b$ 是模 m 的完系.特别地,有某个 i 使 $ac_i-b\equiv 0(\bmod m)$,即

$$ac_i\equiv b(\bmod m).$$

如果 x,x' 满足 $ax\equiv b(\bmod m)$, $ax'\equiv b(\bmod m)$, 则

$$ax\equiv ax'(\bmod m),$$

所以 $x\equiv x'(\bmod m)$(见(i)中论证),即 x 与 x' 属于模 m 的同一个同余类.

由定理 6(iii) 推出,如 $(a,m)=1$,则存在 x 使

$$ax\equiv 1\ (\bmod m).$$

我们将这样的 x 称为 a **对模 m 的逆**,记作 $a^{-1}(\bmod m)$ 或 a^{-1},它们形成模 m 的一个同余类(从而在模 m 的意义下唯一).特别地,有一个 a^{-1} 满足 $1\leqslant a^{-1}<m$.

定理 7　设 $(a,m)=(b,m)=1$,则

(i) $(ab)^{-1}\equiv a^{-1}\cdot b^{-1}(\bmod m)$;

(ii) $a^{-1}\equiv b^{-1}(\bmod m)$ 的充分必要条件是 $a\equiv b(\bmod m)$;

(iii) 如果 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的任一缩系,则它们的逆 $r_1^{-1},\cdots,r_{\varphi(m)}^{-1}$ 也是模 m 的一个缩系.

证明　(i) 与(ii) 均是定义的直接推论;(iii) 可由(ii) 导出来.

例 1　求满足 $24x\equiv 7\ (\bmod 59)$ 的所有 x.

解　由于 $(24,59)=1$, 从而

$$\begin{aligned}x&\equiv\frac{7}{24}\equiv\frac{7+59}{24}\equiv\frac{66}{24}\equiv\frac{11}{4}\equiv\frac{-48}{4}\\&\equiv-12\ (\bmod 59).\end{aligned}$$

例 2 设 p 是素数，$p \geqslant 5$，则

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

证明 对任意与 p 互素的整数 a，由定理 6(ii)，$a, 2a, \cdots, (p-1)a$ 是模 p 的缩系，故(参考定理 7(iii))

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i}\right)^2 \equiv \sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{ai}\right)^2 \pmod{p},$$

即

$$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^2} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{4}$$

因为 $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ 意味着 $a \equiv \pm 1 \pmod{p}$；故对 $p \geqslant 5$，必存在 a 使 $p \nmid a$ 且 $p \nmid \left(\frac{1}{a^2}-1\right)$. 对这样选择的 a，由(4)推出(3)成立.

(3)也可采用更直接的证明：因 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{p-1}$ 是模 p 的一个缩系，从而(对 $p \geqslant 5$)

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i}\right)^2 \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

习 题 4

1*. 证明：连续 n 个整数中恰有一个被 n 整除.

2*. 对正整数 n，记 $S(n)$ 为其十进制表示中的数码之和；$T(n)$ 为其数码的正负交错和. 例如

$$S(123) = 1+2+3 = 6;\ T(123) = 1-2+3 = 2.$$

证明

$$S(n) \equiv n \pmod{9} \quad 及 \quad T(n) \equiv n \pmod{11}.$$

3*. (i) 证明:完全平方数模 3 同余于 0 或 1;模 4 同余于 0 或 1;模 5 同余于 0,1 或 4.

(ii) 证明:完全立方数模 9 同余于 0 或 ± 1;整数的四次幂模 16 同余于 0 或 1.

4*. 设 a 是奇数,n 为正整数,证明

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

5*. (i) 证明:当 $n \geqslant 3$ 时,$\varphi(n)$ 是偶数;

(ii) 证明:当 $n \geqslant 2$ 时,不超过 n 且与 n 互素的正整数之和是 $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

6. 设 n 为偶数,$a_1,\cdots,a_n$ 及 $b_1,\cdots,b_n$ 都是模 n 的完系,则 $a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$ 不是模 n 的完系.

7. 设 m,n 都是正整数,$m=nt$. 则模 n 的任一个同余类

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv r \pmod{n}\}$$

可表示为 t 个模 m 的(两两不同的)同余类

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv r + in \pmod{m}\}\ (i = 0,1,\cdots,t-1)$$

之并.

8. 设 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$, $n > 0$, $a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是整数,且 $a_n > 0$. 证明:$f(n)(n = 1,2,\cdots)$ 中有无穷多个合数.

9*. 设 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 是素数,则 $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$.

10. 设 p 是素数,证明:$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] \pmod{p}$.

11. 设 a,b 是整数,$a+b \neq 0$ 且 $(a,b)=1$; p 是素数. 证明:$\left(a+b, \frac{a^p+b^p}{a+b}\right) = 1$ 或 p.

12. 设 a,b 为整数,n 是正整数,证明

$$n! \mid b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b).$$

13. 用例 1 的方法求满足下面同余式的 x:

(i) $8x \equiv 5 \pmod{23}$;

(ii) $60x \equiv 7 \pmod{37}$.

§5. 同余类的运算

设 $m > 1$ 是一个固定的正整数,现在我们定义 $\mathbf{Z}_m$ 中的运算.

设 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m$,我们将模 m 的同余类 $\overline{a+b}$ 称为同余类 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 之和,表示成

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}.$$

如果我们在 $\bar{a}, \bar{b}$ 中分别取另外两个元素 a', b',则 $a \equiv a' \pmod{m}$, $b \equiv b' \pmod{m}$. 从而

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{m} (\S 4, \text{定理 } 2(\text{i})),$$

于是 $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$. 这表明,同余类 $\overline{a+b}$ 与我们对 $\bar{a}, \bar{b}$ 的代表元的选取无关,即上面定义的和 $\bar{a} + \bar{b}$ 是(由同余类 $\bar{a}, \bar{b}$)唯一确定的.

容易验证,如上定义的 $\mathbf{Z}_m$ 中的加法运算与复数中的加法运算一样,满足(通常的)结合律与交换律. 又同余类 $\bar{0}$ 具有这样的性质:对任意 $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m$, $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$;并且方程 $\bar{x} + \bar{a} = \bar{0}$ 在 $\mathbf{Z}_m$ 中有唯一的解

$$\bar{x} = \overline{-a}.$$

因此,同余类 $\bar{0}$ 在 $\mathbf{Z}_m$ 的加法运算中所起的作用,相当于复数中的数 0 在加法中所起的作用. 我们通常将 $\bar{0}$ 称为 $\mathbf{Z}_m$ **中的(加法)零元**,而将 $\overline{-a}$ 称作 $\bar{a}$ 的(**加法**)**逆元**,并记作 $-\bar{a}$. 于是,对任意 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m$,方程 $\bar{x} + \bar{a} = \bar{b}$ 有唯一的解

$$\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}.$$

所以,$\mathbf{Z}_m$ 中可以作加法的逆运算——减法. 在代数学中,具有上面性质的集合叫作(交换)群. 于是 $\mathbf{Z}_m$ 对于加法形成一个群,叫做**模 m 的加法群**,这是由 m 个元素构成的有限群.

除了加、减法运算外，$\mathbf{Z}_m$ 中还可作乘法. 设 $\bar{a},\bar{b}\in\mathbf{Z}_m$，我们将模 m 的同余类 $\overline{ab}$ 称为同余类 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的积，表示成

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}.$$

与上面类似地可知，$\bar{a}\cdot\bar{b}$ 是不依赖于 $\bar{a},\bar{b}$ 中代表元的选取而唯一确定的.

此外，易于验证，$\mathbf{Z}_m$ 中的乘法运算也与复数中的乘法一样，满足结合律与交换律；并且，乘法与加法还满足分配律. 而同余类 $\bar{1}$ 则相当于复数中数 1 的作用：对任意 $\bar{a}\in\mathbf{Z}_m$，$\bar{1}\cdot\bar{a}=\bar{a}$. 我们因此将 $\bar{1}$ 称为 **$\mathbf{Z}_m$ 中的（乘法）单位**. 代数学中，满足上述（加、减、乘法）三种运算和运算律的集合叫作交换环. 我们熟悉的复数集合，实数集合，有理数集合和整数集合都是环，这些环均具有无限多个元素. 而现在我们给出了有限环的例子：模 m 的 m 个同余类组成的集合，叫作**模 m 的同余类环**.

对于乘法，我们前面已提到过，$\mathbf{Z}_m$ 中乘法单位 $\bar{1}$ 类似于复数中的数 1. 在复数中，每个非零元都有乘法逆，即任给 $\alpha\in\mathbf{C}$，$\alpha\neq0$，方程 $x\alpha=1$ 有唯一的解 $x\in\mathbf{C}$. 但在 $\mathbf{Z}_m$ 中，方程 $\bar{x}\cdot\bar{a}=\bar{1}$ 并非对每个 $\bar{a}\in\mathbf{Z}_m(\bar{a}\neq\bar{0})$ 有解，即 $\bar{a}$ 在 $\mathbf{Z}_m$ 中不一定总有乘法逆. 例如，在 $\mathbf{Z}_6$ 中就不存在 $\bar{x}$，使 $\bar{2}\cdot\bar{x}=\bar{1}$（因这意味着 $2x\equiv1\pmod 6$），显然不可能).

$\mathbf{Z}_6$ 中的元素 $\bar{2}$ 没有逆的原因，在于它是 $\mathbf{Z}_6$ 中的所谓零因子. 一般地，$\mathbf{Z}_m$ 中的元素 $\bar{x}$ 称为 $\mathbf{Z}_m$ 中的**零因子**，是指 $\bar{x}\neq\bar{0}$，但存在 $\bar{y}\in\mathbf{Z}_m$，$\bar{y}\neq\bar{0}$ 使 $\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{0}$.（对称地，$\bar{y}$ 也是 $\mathbf{Z}_m$ 中的零因子.）如果 $\bar{x}$ 是 $\mathbf{Z}_m$ 中的零因子，则 $\bar{x}$ 在 $\mathbf{Z}_m$ 中便不可能有乘法逆. 因如果存在 $\bar{z}$ 使 $\bar{x}\cdot\bar{z}=\bar{1}$，又设 $\bar{y}\neq\bar{0}$ 使 $\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{0}$，则产生

$$\bar{y}=(\bar{x}\cdot\bar{z})\cdot\bar{y}=(\bar{x}\cdot\bar{y})\cdot\bar{z}=\bar{0}\cdot\bar{z}=\bar{0}.$$

然而，不难验证，模 m 的 $\varphi(m)$ 个缩同余类构成的集合 $\mathbf{Z}_m^*$ **形成（交换的）乘法群**.

首先，两个缩同余类之积仍是缩同余类（§2，定理 3(v)），即 $\mathbf{Z}_m^*$ 对乘法封闭. 此外，$\mathbf{Z}_m^*$ 是 $\mathbf{Z}_m$ 的子集，故在 $\mathbf{Z}_m^*$ 中乘法仍满足结合律与交换

律；而同余类$\overline{1}$显然是$\mathbf{Z}_m^*$中的乘法单位. 最后，由§4，定理6(iii)推出，对每个$\overline{a}\in\mathbf{Z}_m^*$，方程$\overline{x}\cdot\overline{a}=\overline{1}$有唯一的解

$$\overline{x}=\overline{a^{-1}},$$

称为$\overline{a}$的(**乘法**)**逆元**($\overline{a}$与$\overline{a^{-1}}$显然是互逆的). 我们将$\overline{a^{-1}}$记作$\overline{a}^{-1}$，于是，对任意$\overline{a},\overline{b}\in\mathbf{Z}_m^*$，方程$\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$有唯一的解

$$\overline{x}=\overline{b}\cdot\overline{a}^{-1}(\text{也可写成}\frac{\overline{b}}{\overline{a}}).$$

换句话说，只有模m的缩同余类才可以作“分母”. 于是，在$\mathbf{Z}_m^*$中可以作除法运算. 特别当m为素数p时，$\mathbf{Z}_p$中除$\overline{0}$之外，其它$p-1$个同余类均是缩同余类，因此其中可以作加、减、乘、除四则运算(当然$\overline{0}$不能作为分母)，这样的集合叫作域. 我们熟悉的复数集合，实数集合及有理数集合都是域，它们均具有无穷多个元素. 现在我们对于每个素数p，给出了由**模p的p个同余类构成的有限域**.

另一方面，对$m>1$，只有当m是素数时，模m的剩余类环才能是域. 这是因为，若m不是素数，则m有正约数d，$1<d<m$. 显然$\overline{d}$及$\overline{\frac{m}{d}}$都不是$\mathbf{Z}_m$中的零元，但$\overline{d}\cdot\overline{\frac{m}{d}}=\overline{m}=\overline{0}$，即$\mathbf{Z}_m$中有零因子，因此$\mathbf{Z}_m$中非零元之集对乘法不形成群，从而$\mathbf{Z}_m$不是域.

对素数p，我们通常用$\mathbf{F}_p$表示由模p的p个同余类构成的域.

例1　设p是素数，则$(p-1)!\equiv-1\pmod p$.

证明　$p=2$时结论显然成立. 设$p\geqslant 3$，由于对模p的任一缩同余类$\overline{a}$，存在唯一的(逆)$\overline{a}^{-1}$，满足

$$\overline{a}\cdot\overline{a}^{-1}=\overline{1};$$

而$\overline{a}=\overline{a}^{-1}$等价于$\overline{a}^2=\overline{1}$，即$\overline{a}=1$或$\overline{p-1}$. 于是$p-3$个同余类$\overline{2},\overline{3},\cdots,\overline{p-2}$可按互逆配成$\frac{p-3}{2}$个对. 因此

$$\overline{(p-1)!}=\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\cdots\cdot\overline{(p-2)}\cdot\overline{(p-1)}$$
$$=\overline{p-1}=\overline{-1}.$$

这就是 $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

注记　1. 上面的论证，不难改换成同余式的记号来表述. 我们强调一下，整数的"$\equiv \pmod m$"与 $\mathbf{Z}_m$ 中同余类的"$=$"是一回事.

许多问题，以同余类的观点作的论证，往往更能揭示其实质，这一点在学习了群论后将看得很清楚. 但限于本书的目的，我们在大多数场合下仍采用同余式的语言，有兴趣的读者可以将它们换成同余类的说法.

2. 例 1 的结论，通常称为**威尔逊**(Wilson) **定理**，其一个引人注目之处在于，如果 $p>1$ 满足例 1 中的同余式，则 p 必是素数. 事实上，如果 p 有素因子 $q\leqslant p-1$，则 $q\mid(p-1)!$，从而易知 $q\mid 1$，矛盾！

习　题　5

1. 列出 $\mathbf{Z}_6$ 中的加法表与乘法表.

2. 列出 $\mathbf{F}_7$ 中的加法与乘法表.

3. 设 m 是整数，$m>1$，确定 $\mathbf{Z}_m$ 中零因子的个数.

4*. 设 m 是整数，$m>1$. 证明：在 $\mathbf{Z}_m^*$ 中乘法的消去律成立，即设 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbf{Z}_m^*$，$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{c}$，则 $\bar{b}=\bar{c}$.

5*. 设 m 是整数，$m>1$. 证明：$\mathbf{Z}_m^*$ 中任一元与 $\mathbf{Z}_m^*$ 中所有元的积，恰给出 $\mathbf{Z}_m^*$.

6. 用同余类的语言重述 §4，定理 7.

7*. 设 p 是素数，

(i) 如果 $\bar{a}\in\mathbf{F}_p$，则 $p\bar{a}=\underbrace{\bar{a}+\cdots\bar{a}}_{p个}=\bar{0}$；

(ii) 设 n 是整数，$\bar{a}\in\mathbf{F}_p$，$\bar{a}\neq\bar{0}$. 若 $n\bar{a}=\bar{0}$，则 $p\mid n$.

8. 设 p 为奇素数，证明

(i) $1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$；

(ii) $2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

9. 设 p 是素数，$r_1, \cdots, r_{p-1}$ 与 $r_1', \cdots, r_{p-1}'$ 是模 p 的两个缩系，证明：$r_1r_1', \cdots, r_{p-1}r_{p-1}'$ 不是模 p 的缩系.

§6. 欧拉—费马定理

本节讲述初等数论中几个重要的定理.

我们首先给出关于欧拉函数 $\varphi(n)$ 的基本结果.

定理 1　(i) 欧拉函数 $\varphi(n)$ 是积性的，即如果 $(m,n)=1$，则有

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n);$$

(ii) 设 $n \geqslant 2$，$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解，则

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right);$$

(iii) 设 n 是正整数，则

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n,$$

其中求和表示 d 通过 n 的所有正约数.

证明　(i) 设 $1, \alpha, \cdots, \gamma$ 是不超过 m 且与 m 互素的正整数. 则不超过 mn 且与 m 互素的正整数是

$$\begin{array}{cccc}
1 & \alpha & \cdots & \gamma \\
m+1 & m+\alpha & \cdots & m+\gamma \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(n-1)m+1 & (n-1)m+\alpha & \cdots & (n-1)m+\gamma
\end{array}$$

数表中同一列中的数在模 m 的同一个剩余类中. 因 $(m,n)=1$，由 §4，

定理 6(i) 知，每一列中的 n 个数恰构成模 n 的一个完系，从而其中恰包含 $\varphi(n)$ 个数与 n 互素. 因共有 $\varphi(m)$ 列，因此，共有 $\varphi(m)\varphi(n)$ 个小于 mn 的正整数既与 m 互素，又与 n 互素，从而与 mn 互素. 于是

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

(ii) 由(i) 及归纳法知，如 $n_1,\cdots,n_k$ 两两互素，则

$$\varphi(n_1\cdots n_k) = \varphi(n_1)\cdots\varphi(n_k).$$

因此，$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i^{\alpha_i})$. 于是问题化归为计算 $\varphi(p^\alpha)$(p 为素数，$\alpha\geqslant 1$).

因 p 是素数，故对每个整数 m，或者 $p|m$ 或者 $(p^\alpha,m) = 1$. 而在 $1,\cdots,p^\alpha$ 中，被 p 整除的数共有 $\frac{p^\alpha}{p} = p^{\alpha-1}$ 个，所以其中与 p^α 互素的共有 $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ 个，即

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}) = \prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}(1-\frac{1}{p_i})\\ &= n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}).\end{aligned}$$

(iii) 设 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解，则 n 的每个正约数 d 均唯一地表示为 $d = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$，其中 $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$(§ 3，定理 3 的推论 1). 故由(i)及(ii)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\varphi(d) &= \sum_{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i}\varphi(p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k})\\ &= \sum_{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i}\varphi(p_1^{\beta_1})\cdots\varphi(p_k^{\beta_k})\\ &= \prod_{i=1}^{k}\sum_{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i}\varphi(p_i^{\beta_i})\\ &= \prod_{i=1}^{k}(1+(p_i-1)+\cdots+(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1}))\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{q_i} = n.$$

定理 2(欧拉定理)　设 m 为正整数,a 为整数且$(a,m)=1$,则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

证明　设模 m 的缩同余类是$\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_{\varphi(m)}$,则$\bar{a}\cdot\bar{r}_1,\cdots,\bar{a}\cdot\bar{r}_{\varphi(m)}$也是模 m 的缩同余类.因此(参考习题 5.5)

$$\bar{r}_1\cdots\bar{r}_{\varphi(m)} = (\bar{a}\cdot\bar{r}_1)\cdots(\bar{a}\cdot\bar{r}_{\varphi(m)}),$$

即

$$\bar{r}_1\cdots\bar{r}_{\varphi(m)} = \bar{a}^{\varphi(m)}(\bar{r}_1\cdots\bar{r}_{\varphi(m)}).$$

故$\bar{a}^{\varphi(m)}=\bar{1}$(习题 5.4),这就是$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$.

在定理 2 中取 m 为素数 p,由于$\varphi(p)=p-1$,我们得到

定理 3(费马定理)　设 p 是素数,a 为整数且 $p\nmid a$,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

费马定理等价于下面更便利的

定理 3′　设 p 是素数,则对任意整数 a,有

$$a^p \equiv a \pmod{p} \tag{2}$$

实际上,当 $p\nmid a$ 时,(1) 与(2) 是等价的;而当 $p\mid a$ 时,(2) 显然成立.因此定理 3 与定理 3′ 是等价的.

基于不同的想法,定理 3′(从而定理 3) 有许多种不同的直接证明,我们在此提及其中一个.

引理　设 p 是素数，则对 $1 \leqslant k \leqslant p-1$，二项式系数 $\binom{p}{k}$ 均被 p 整除.

证明　由于

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1},$$

故 $p \mid k\binom{p}{k}$. 但 $1 \leqslant k \leqslant p-1$，从而 $p \nmid k$，因此 $p \mid \binom{p}{k}$.

定理 3′ 的证明　由于当 $a \equiv b \pmod p$ 时

$$a^p - a \equiv b^p - b \pmod p.$$

这表明，同余式(2)仅依赖于 a 模 p 的余数. 因此我们只需对 $a = 0, 1, \cdots, p-1$ 证明(2).

对 a 归纳. 当 $a = 0$ 时，(2) 显然成立. 假设(2) 对于 a 已成立 $(0 \leqslant a \leqslant p-2)$，则由二项式定理，上述引理及归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}(a+1)^p &\equiv a^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + 1 \\ &\equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod p.\end{aligned}$$

从而(2)对 $a+1$ 也成立. 证毕.

另一方面，由定理 3 及 $\varphi(m)$ 的计算公式(定理 1(ii)) 也能证明定理 2. 因此，定理 2 与定理 3 实际上是等价的.

定理 2 的另一证明　设 $m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 m 的标准分解. 由 §4，定理 5(iii)，我们只需证明，对 $1 \leqslant i \leqslant k$，

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

但

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1).$$

因此，这只需对素数 p 及整数 $\alpha \geqslant 1$，证明

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}} \tag{3}$$

（§4，定理 2(ii)）. 现在我们用归纳法证明同余式(3)成立. 当 $\alpha = 1$ 时，这就是定理 3(我们已作出其直接证明). 设(3) 对于 α 已成立，即

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1 + p^{\alpha} x,$$

其中 x 是一个整数. 则由二项式定理得知

$$a^{p^{\alpha}(p-1)} \equiv (1 + p^{\alpha} x)^{p} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}},$$

这就证明了(3)对 $\alpha \geqslant 1$ 均成立.

我们注意，由上面的证明可见，如记 $l(m) = [\varphi(p_1^{\alpha_1}), \cdots, \varphi(p_k^{\alpha_k})]$，则当 $(a, m) = 1$ 时有

$$a^{l(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

这一结果往往比欧拉定理强(参考 §8).

习 题 6

1. 计算 $\varphi(360)$，$\varphi(429)$.

2. 求 3^{400}(十进制表示中) 的末两位数码.

3. 设整数 $n \geqslant 3$，分别用欧拉定理和 $\varphi(n)$ 的公式，证明 $\varphi(n)$ 为偶数.

4. 设 m, n 为正整数，$(m, n) = 1$. 证明：

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

5. 设 $(a, 10) = 1$，证明：$a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.

6. 设 $m > 1$，$\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^*$，用欧拉定理给出 $\bar{a}$ 的逆.

7*. 设 p 是素数，证明

(i) 对任意 $\alpha \in \mathbf{F}_p$，有 $\alpha^p = \alpha$；

(ii) 对任意 $\alpha,\beta \in \mathbf{F}_p$,有 $(\alpha+\beta)^p = \alpha^p + \beta^p$.

8*. 对 $n \geqslant 1$,**墨比乌斯**(Möbius) **函数** $\mu(n)$ 定义为

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdots p_r, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $p_1,\cdots,p_r$ 是互不相同的素数,

(i) 证明: $\mu(n)$ 是积性函数;

(ii) 证明: $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$

9*. 设 $f(n)$ 为任一个数论函数. 证明

$$\sum_{\substack{x=1 \\ (x,n)=1}}^{n} f(x) = \sum_{d|n} \mu(d)\, S_d,$$

其中 $S_d = \sum\limits_{l=1}^{n/d} f(dl)$.

10*. (**墨比乌斯反转公式**) 设 $f(n)$ 及 $F(n)$ 是两个数论函数,如果

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

则

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right);$$

反之亦然.

11*. 设 $f(n)$,$g(n)$ 是两个积性数论函数,则

$$H(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$$

也是积性函数.

12. 证明: $\sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \dfrac{n}{\varphi(n)}$.

13. 用习题 6.9 证明: $\sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu(d)}{d} = \dfrac{\varphi(n)}{n}$;并由此给出定理 1 中(i)和(iii)的不同证明.

§7. 同余方程(组)

对给定的正整数 m，及一个整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{1}$$

初等数论中一个基本课题是**模 m 的同余方程**

$$f(x)\equiv 0 \pmod m \tag{2}$$

的求解问题.

设 $x=c$ 时同余式(2)成立，则称 c 是**同余方程(2)的解**. 这时同余类 $\bar{c}$ 中所有数也是解(§4，定理 3)；我们将这些解视为相同的，并称同余类 $\bar{c}$ 是同余方程(2)的一个解，记作 $x\equiv c \pmod m$.

如果 c,c' 均为(2)的解，且模 m 不同余，则称它们是同余方程(2)的不同的解. 所有两两模 m 不同余的解的个数，称为同余方程(2)的**解数**. 因此，求同余方程(2)的解，只需在模 m 的任一完系(有限集!)中求解，这完系中解的个数就是(2)的解数. 于是同余方程(2)的解数不超过 m.

设 $f(x)$ 由(1)给出，如果 $m\mid(a_n,\cdots,a_0)$，则同余方程(2)恒成立(所有整数 x 都是解)，于是(2)有 m 个解.

当 $m\nmid(a_n,\cdots,a_0)$ 时，必有唯一的 $k(0\leqslant k\leqslant n)$，满足 $m\mid a_i(k<i\leqslant n)$，但 $m\nmid a_k$. 此时，同余方程(2)与同余方程

$$a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0\equiv 0 \pmod m \tag{3}$$

的解(及解数)相同. 我们称(2)与(3)等价的，并称(2)为 k **次同余方程**，也称 $f(x)$ 为**模 m 的 k 次多项式**. (注意，$f(x)$ 作为整系数多项式的次数，与 $f(x)$ 模 m 的次数是两个不同的概念；而当 $m\mid(a_n,\cdots,a_0)$ 时，我们不定义 $f(x)$ 模 m 的次数).

本节我们主要讨论一次同余方程(组)的求解.

定理 1 设 $(a,m)=d$，则一次同余方程

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{4}$$

有解的充分必要条件是 $d|b$. 当此条件成立时,同余方程(4) 共有 d 个解,它们是

$$x \equiv x_0 + t \cdot \frac{m}{d} \pmod{m}, \quad t = 0, \cdots, d-1; \tag{5}$$

其中 x_0 是同余方程

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}} \tag{6}$$

的任一个解.

证明　设同余方程(4)有解 $x = c$, 则 $m|(ac - b)$, 从而 $d|(ac - b)$. 但 $d|a$,故 $d|b$.

反过来,如 $d|b$,则由 §4,定理 5(ii) 知,同余方程(4) 和(6) 等价. 因$\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$,故由 §4,定理 6(iii) 知,同余方程(6) 有解. 若 x_0 是(6) 的 解,则同余方程(6) 的解,进而同余方程(4) 的解是模$\frac{m}{d}$ 的一个同余类

$$x \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{d}}. \tag{7}$$

最后,由习题 4.7 可知,满足(7)的所有 x 可表示为(5) 中 d 个模 m 的同余类之并.

对于一般的高于一次的同余方程,解的个数及求解问题将变得非常复杂和困难,本书不作深入讨论. 我们将在第四章中研究二次同余方程,在这里则只证明下面的简单但很有用的结果.

定理 2(拉格朗日(Lagrange))　设 p 是素数,令

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个模 p 为 n 次的整系数多项式(即 $p \nmid a_n$), 则同余方程

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{8}$$

至多有 n 个解.

证明 我们对 n 归纳. 当 $n=1$ 时,同余方程(8) 恰有一个解,故结论成立. 假设结论对于所有模 p 为 $n-1$ 次的多项式已成立. 如果方程(8) 有 $n+1$ 个(模 p 互不同余的) 解 $x_1,\cdots,x_{n+1}$. 令 $y=x-x_1$,则(8) 变为等价的 n 次同余方程

$$a_n y^n + a'_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a'_1 y + a'_0 \equiv 0 \pmod p, \tag{9}$$

其首项系数仍是 a_n,并且有 $n+1$ 个解

$$0, x_2 - x_1, \cdots, x_{n+1} - x_1.$$

因为 $y=0$ 适合(9),故 $a'_0 \equiv 0 \pmod p$. 因此(9)可改写成

$$y(a_n y^{n-1} + a'_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a'_1) \equiv 0 \pmod p.$$

现在,n 个数 $x_2-x_1,\cdots,x_{n+1}-x_1$(均不被 p 整除)满足上述同余方程,故它们均满足 $n-1$ 次同余方程

$$a_n y^{n-1} + a'_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a'_1 \equiv 0 \pmod p,$$

这与归纳假设矛盾!

注记 如果定理 2 中的素数 p 换成合数,则命题不必正确. 例如,模 8 的二次同余方程 $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ 却有四个解:

$$x \equiv 1,3,5,7 \pmod 8.$$

现在我们讨论(一次) 同余方程组. 同余方程组不一定总有解,即使其中每一个同余方程都有解. 例如,同余方程 $x \equiv 0 \pmod 2$ 及 $x \equiv 1 \pmod 4$ 都有解,但显然它们没有公共解. 这一例子中,两个同余方程的模(分别是 2 和 4) 不互素. 我们将证明,如果若干个可解的一次同余方程的模两两互素,则它们必有公共解. 我们首先证明下面的基本结果.

定理 3(中国剩余定理) 设 $m_1,\cdots,m_k$ 是两两互素的正整数,则对

任意整数 $b_1,\cdots,b_k$，一次同余方程组

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad \cdots, \quad x \equiv b_k \pmod{m_k} \tag{10}$$

必有解，且全部解是模 $m_1\cdots m_k$ 的一个同余类. 确切地说，同余方程组(10)的解是

$$x \equiv M_1M_1^{-1}b_1 + \cdots + M_kM_k^{-1}b_k \pmod{m_1\cdots m_k} \tag{11}$$

其中 M_i 及 $M_i^{-1}(1 \leqslant i \leqslant k)$ 由下面的条件决定：

$$m_1\cdots m_k = M_im_i, \quad M_iM_i^{-1} \equiv 1 \pmod{m_i}.$$

证明　由条件知 $(m_i,M_i)=1$，故有 M_i^{-1} 使 $M_iM_i^{-1} \equiv 1 \pmod{m_i}$. 此外，对 $j \neq i$ 有 $m_j | M_i$，因此数 $d_i = M_iM_i^{-1}$ 满足

$$d_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad d_i \equiv 0 \pmod{m_j} \text{ 对 } j \neq i. \tag{12}$$

我们注意，同余方程组(12)是(10)的 k 种特殊情形. 易于验证，对 $1 \leqslant i \leqslant k$，(12) 的解的“叠加”(即线性组合)$b_1d_1 + \cdots + b_kd_k$，满足同余方程组(10)，从而(11) 是(10) 的解.

另一方面，如果 x,x' 都是同余方程组(10)的解，则

$$x \equiv x' \pmod{m_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

故 $x \equiv x' \pmod{m_1\cdots m_k}$(§4，定理 5(iii) 及 §2，定理 4(v)). 因此原同余方程组的解是模 $m_1\cdots m_k$ 的一个同余类.

推论　设正整数 $m_1,\cdots,m_k$ 两两互素，则同余方程组

$$a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad \cdots, \quad a_kx \equiv b_k \pmod{m_k}$$

有解的充分必要条件是每一个同余方程 $a_ix \equiv b_i \pmod{m_i}$ 均可解.

证明　所说的条件显然是必要的. 反过来，如条件已满足，则由定理 1 知，对 $i=1,\cdots,k$ 有 $d_i | b_i$，这里 $d_i = (a_i,m_i)$. 因 $\left(\frac{a_i}{d_i},\frac{m_i}{d_i}\right)=1$，故有 c_i 使

$$\frac{a_i}{d_i}c_i \equiv 1 \pmod{\frac{m_i}{d_i}}.$$

因此原同余方程组等价于

$$x \equiv c_i \frac{b}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}}, \quad \cdots, \quad x \equiv c_k \frac{b_k}{d_k} \pmod{\frac{m_k}{d_k}}.$$

因 $\frac{m_1}{d_i},\cdots,\frac{m_k}{d_k}$ 显然两两互素，所说的结果便可从定理 3 推出来.

定理 3 在国外文献和教科书中均称作“中国剩余定理”，并且在代数学中被推广成非常一般的形式. 我们则常把它叫作“孙子定理”，因为我国古代数学著作《孙子算经》中载有下面的“物不知其数”问题：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

用现在的记号，这个问题相当于求解同余方程组

$$x \equiv 2 \pmod 3, \quad x \equiv 3 \pmod 5, \quad x \equiv 2 \pmod 7.$$

程大位在《算法统宗》(1593 年)中将这一问题的解法总结成如下的歌诀：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝.
七子团圆半个月，除百零五便得知.

其中，前三句的 70，21 和 15(半个月)分别就是定理 3 证明中的 d_1,d_2,d_3. 所以“物不知其数”问题的一个解是

$$70 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 233.$$

而歌诀最后一句的含义应当是与 233 相差 105($=2\cdot5\cdot7$) 任意倍数的正数都是问题的解，即解为满足 $x \equiv 233 \pmod{105}$ 的正整数，其中最小的解是 23.

例 1 解同余方程组

$$x \equiv 1 \pmod 4,\ x \equiv 2 \pmod 5,\ x \equiv 4 \pmod 7,$$

解 设 d_1 是 $d_1 \equiv 1 \pmod 4$，$d_1 \equiv 0 \pmod 5$，$d_1 \equiv 0 \pmod 7$ 的

一个解，即 d_1 满足条件 $d_1 \equiv 1 \pmod 4$ 和 $35 \mid d_1$. 因而可取 $d_1 = -35$. 类似地，可取 $d_2 = 56$ 满足 $d_2 \equiv 1 \pmod 5$ 和 $28 \mid d_2$；可取 $d_3 = -20$ 满足 $d_3 \equiv 1 \pmod 7$ 和 $20 \mid d_3$. 于是同余方程组的解是

$$x \equiv -35 \cdot 1 + 56 \cdot 2 - 20 \cdot 4 \equiv -3 \pmod{140}.$$

例 2　解同余方程组

$$5x \equiv 7 \pmod{12},\ 7x \equiv 1 \pmod{10}.$$

解　由于 12 与 10 不互素，我们不能直接应用孙子定理. 但是 $5x \equiv 7 \pmod{12}$ 等价于 $x \equiv 2 \pmod 3$ 和 $x \equiv 3 \pmod 4$；而 $7x \equiv 1 \pmod{10}$ 等价于 $x \equiv 1 \pmod 2$ 和 $x \equiv 3 \pmod 5$. 因此原同余方程组等价于

$$x \equiv 2 \pmod 3,\quad x \equiv 3 \pmod 4,$$
$$x \equiv 1 \pmod 2,\quad x \equiv 3 \pmod 5.$$

注意 $x \equiv 3 \pmod 4$ 和 $x \equiv 1 \pmod 2$ 等价于同余方程 $x \equiv 3 \pmod 4$. 因此问题归结为求

$$x \equiv 2 \pmod 3,\ x \equiv 3 \pmod 4,\ x \equiv 3 \pmod 5$$

的解. 现在可以用孙子定理，得到解 $x \equiv 23 \pmod{60}$. 这也是原同余方程组的解.

例 3　设 n 是奇数，$n > 1$；k 是整数，且对 n 的任一素因子 p，有 $(p-1) \nmid k$. 记

$$S_k(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i,n)=1}}^{n} i^k.$$

证明 $n \mid S_k(n)$.

证明　我们首先考虑特殊情形：$n = p$ 是一个奇素数. 对任意与 p 互素的整数 a，数 $a, 2a, \cdots, (p-1)a$ 为模 p 的缩系，故

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv \sum_{i=1}^{p-1} (ai)^k \pmod{p}. \tag{13}$$

因此

$$(a^k - 1)S_k(p) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{14}$$

现在我们证明，可以选取 a，满足 $p \nmid a$ 及 $p \nmid (a^k - 1)$. 由此及(14)便导出 $p \mid S_k(p)$.

事实上，由带余除法及 $(p-1) \nmid k$ 可知，$k = (p-1)q + r$，q 是整数，而余数 r 现在满足 $0 < r \leqslant p-2$. 由拉格朗日定理，同余方程 $x^r - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 至多有 $r(\leqslant p-2)$ 个解，从而 $p-1$ 个数 $1,2,\cdots,p-1$ 中必有一个 a 满足 $p \nmid (a^r - 1)$，于是 $p \nmid (a^k - 1)$. 这就证明了 $n = p$ 时的结论.

现在设 n 为大于 1 的奇数，对任一个与 n 互素的整数 a，与(13)，(14)类似地有

$$(a^k - 1)S_k(n) \equiv 0 \pmod{n}. \tag{15}$$

我们证明，可选择 a 使得

$$(a,n) = (a^k - 1,n) = 1.$$

由此及(15)便证明了结论.

设 n 的不同素因子为 $p_1,\cdots,p_l$. 由于 $(p_i - 1) \nmid k$，从上面的论证知，对每个 p_i，存在 a_{p_i} 使

$$(a_{p_i}, p_i) = (a_{p_i}^k - 1, p_i) = 1.$$

由孙子定理，存在 a 满足下面 l 个同余式.

$$a \equiv a_{p_i} \pmod{p_i} \ (1 \leqslant i \leqslant l).$$

这样的 a 显然满足 $p_i \nmid a$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$，从而 $(a,n) = 1$；又 $a^k - 1 \equiv a_{p_i}^k - 1 \pmod{p_i}$，故 $p_i \nmid a^k - 1 (1 \leqslant i \leqslant l)$，即 a 满足 $(a^k - 1, n) = 1$. 这就完成了证明.

习　题　7

1. 解下列同余方程：

(i) $32x \equiv 12 \pmod 8$；

(ii) $28x \equiv 124 \pmod{116}$；

(iii) $5x \equiv 44 \pmod{81}$.

2. 解下列一次同余方程组：

(i) $x \equiv 1 \pmod 3$，$x \equiv 1 \pmod 5$，$x \equiv 2 \pmod 7$；

(ii) $x \equiv 1 \pmod 4$，$x \equiv 2 \pmod 5$，$x \equiv 3 \pmod 9$.

3. 用孙子定理解同余方程 $37x \equiv 31 \pmod{77}$.

4. 解同余方程组

$$x \equiv 3 \pmod 8,\ x \equiv 11 \pmod{20},\ x \equiv 1 \pmod{15}.$$

5. 求 2^{400} 被 319 除得的余数.

6*. (i) 设 m_1, m_2 都是正整数，b_1, b_2 是任意整数. 证明：一次同余方程组

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1},\quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

有解的充分必要条件是 $(m_1, m_2) \mid (b_1 - b_2)$；并且当此条件成立时，该同余方程组的解是模 $[m_1, m_2]$ 的一个同余类；

(ii) 设 $m_1, \cdots, m_k$ 是正整数，$b_1, \cdots, b_k$ 是任意整数，证明：一次同余式组

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1},\ \cdots,\ x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

有解的充分必要条件是对任意 $i \neq j$，有 $(m_i, m_j) \mid (b_i - b_j)$；并且，在此条件成立时，同余方程组的解是模 $[m_1, \cdots, m_k]$ 的一个同余类.

7*. 设 $m_1, \cdots, m_k$ 是两两互素的正整数，且

$$m_1 \cdots m_k = m_i M_i (1 \leqslant i \leqslant k).$$

(i) 证明：模 $m_1 \cdots m_k$ 的完(缩)系可以表示为

$$M_1 x_1 + \cdots + M_k x_k,$$

其中 $x_1,\cdots,x_k$ 分别通过模 $m_1,\cdots,m_k$ 的完(缩)系;

(ii) 由(i)的结论证明:$\varphi(m_1\cdots m_k)=\varphi(m_1)\cdots\varphi(m_k)$.

8. 设 n 为正整数,证明必有 n 个连续的整数,其中每一个数都具有平方因子(即被某个大于 1 的完全平方数整除).

9. 设 a,b 是互素的整数,m 是给定的正整数. 证明:数列 $a+bn(n\geqslant 0)$ 中有无穷个项与 m 互素.

第三章　原根和指数

§8. 原　　根

设 $m>1$ 是给定的正整数，我们现在研究模 m 的 $\varphi(m)$ 个缩同余类 $\mathbf{Z}_m^*$ 对乘法形成的群的结构(参考 §5).

引理 1　设 $(a,m)=1$，则

(i) 存在正整数 n，$1\leqslant n<m$，使 $a^n\equiv 1 \pmod m$；

(ii) 设 n 为(i)中最小的正整数，则对整数 k 和 l，同余式 $a^k\equiv a^l \pmod m$ 成立的充分必要条件是 $k\equiv l \pmod n$. 特别地，$a^k\equiv 1 \pmod m$ 成立的充分必要条件为 $n\mid k$.

证明　(i) 取 $n=\varphi(m)$，所说的结论则是欧拉定理(§6，定理 2)的推论. 我们也可采用下面(更直接)的论证.

m 个数 $a,a^2,\cdots,a^m$ 均与 m 互素，因此必有两个不同的数模 m 同余. 设 $a^k\equiv a^l \pmod m$，其中 $1\leqslant l<k\leqslant m$，进而

$$a^l(a^{k-l}-1)\equiv 0 \pmod m.$$

因 $(a,m)=1$，故 $(a^l,m)=1$. 因此对 $n=k-l$，有 $a^n\equiv 1 \pmod m$，且 n 满足 $1\leqslant n<m$.

(ii) 如果 $a^k\equiv a^l \pmod m$，其中 $k\geqslant l$. 设 $N=k-l$，则与(i)中相同论证可见 $a^N\equiv 1 \pmod m$. 由带余除法，$N=nq+r$，其中 $0\leqslant r<n$. 于是

$$a^r\cdot a^{nq}\equiv 1 \pmod m,$$

即 $a^r\equiv 1 \pmod m$. 由 n 的最小性及 $0\leqslant r<n$，推出必须 $r=0$；

即 $k \equiv l \pmod m$. 反过来的结论显而易见. 证毕.

对与 m 互素的整数 a,满足 $a^n \equiv 1 \pmod m$ 的最小正整数 n,称为 **a 模 m 的阶**.

显然,a 模 m 的阶为 n,等价于说在(乘法)群 $\mathbf{Z}_m^*$ 中,n 是最小正整数使 $\overline{a}^n = \overline{1}$($\mathbf{Z}_m^*$ 中的单位!).

由欧拉定理及引理 1(ii) 可见,对于每个与 m 互素的 a,a 模 m 的阶都是 $\varphi(m)$ 的某个约数,从而阶的值不超过 $\varphi(m)$.

如果存在整数 g,$(g,m)=1$,使 g 模 m 的阶恰是 $\varphi(m)$,则称**模 m 有原根**,并称 g 是模 m 的一个原根.(很明显,如 g 是模 m 的原根,则模 m 的同余类 $\overline{g}$ 中所有数均是模 m 的原根.)

若模 m 存在原根 g,则模 m 的缩系呈现特别简单的结构. 因为,由引理 1(ii) 推出,$g^0 = 1, g, \cdots, g^{\varphi(m)-1}$ 彼此模 m 不同余,并且均与 m 互素,从而这 $\varphi(m)$ 个成几何级数的数形成模 m 的一个缩系,这给研究某些问题带来便利.

换一个角度说,模 m 存在原根 g,等价于乘法群

$$\mathbf{Z}_m^* = \{\overline{1}, \overline{g}, \cdots, \overline{g}^{\varphi(m)-1}\},$$

即 $\mathbf{Z}_m^*$ 由一个元 $\overline{g}$"生成". 这样的群,称为**循环群**,是代数结构最为简单的一类群.

然而,不幸的是,并非对每个整数 $m > 1$ 都有原根. 我们易于证明

引理 2　设 $m \neq 2, 4, p^l$ 或 $2p^l$(p 是奇素数,$l \geqslant 1$),则模 m 没有原根.

证明　(i) 设 $m = 2^l$,其中 $l \geqslant 3$,则对任意与 m 互素的整数 a,有

$$a^{2^{l-2}} \equiv 1 \pmod{2^l} \text{(习题 4.4)}.$$

于是 a 模 2^l 的阶 $\leqslant 2^{l-2} < \varphi(2^l)$,故模 m 不存在原根.

对于满足引理的条件且不是 $2^l (l \geqslant 3)$ 形式的 m,我们可表示为

$m = r \cdot s$，其中 r,s 均大于 2 且互素. 当 $(a,m) = 1$ 时，由欧拉定理，$a^{\varphi(r)} \equiv 1 \pmod r$ 及 $a^{\varphi(s)} \equiv 1 \pmod s$. 由于现在 $\varphi(r),\varphi(s)$ 均是偶数，故

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(r)\varphi(s)} \equiv 1 \pmod{rs}.$$

但

$$\varphi(m) = \varphi(r)\varphi(s) > \frac{1}{2}\varphi(r)\varphi(s),$$

从而模 m 没有原根.

换句话说，若模 m 存在原根，则 m 必须具有形式 $2,4,p^l$ 和 $2p^l$（其中 p 为奇素数而 $l \geqslant 1$）. 易知 1 和 -1 分别是模 2 和模 4 的原根. 现在我们着手证明原根理论中最为基本的结果：

定理 1　对每个奇素数 p，模 p 有原根.

为此需要下面一个简单但有用的引理.

引理 3　设 $(a,m) = 1$，a 模 m 的阶为 n，则 a^k 模 m 的阶是 $\frac{n}{(k,n)}$. 特别地，a^k 模 m 的阶为 n 的充分必要条件是 $(k,n) = 1$.

证明　设 l 为正整数，由引理 1(ii) 可见，同余式

$$(a^k)^l \equiv 1 \pmod m \tag{1}$$

等价于 $n \mid kl$. 这显然又等价于

$$\frac{n}{(k,n)} \Big| l \cdot \frac{k}{(k,n)},$$

即 $\frac{n}{(k,n)} \Big| l$. 因此，使 (1) 成立的最小正整数 l 为 $\frac{n}{(k,n)}$，即 a^k 模 m 的阶是 $\frac{n}{(k,n)}$.

定理 1 的证明　$p-1$ 个数 $1,2,\cdots,p-1$ 模 p 的阶都是 $\varphi(p)=p-1$ 的约数. 对 $p-1$ 的每一个正约数 d, 令

$$S(d)=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant p-1,\ x \text{ 模 } p \text{ 的阶是 } d\}.$$

我们的目标是证明 $S(p-1)$ 非空.

显然诸集合 $S(d)$(其中 $d\mid p-1$) 是集合 $\{1,2,\cdots,p-1\}$ 的一个划分,即每个 $x(1\leqslant x\leqslant p-1)$ 恰属于一个集合 $S(d)$. 记 R_d 是 $S(d)$ 的元素个数,则

$$\sum_{d\mid p-1} R_d=p-1. \tag{2}$$

显然, $S(d)$ 中的元素均是同余方程

$$x^d-1\equiv 0 \pmod p \tag{3}$$

的解. 另一方面,如果 $R_d\neq 0$,即有某个 a 模 p 的阶为 d,由引理 1(ii) 知,d 个数 $1,a,\cdots,a^{d-1}$ 彼此模 p 不同余,又它们都满足同余方程(3). 但由 §7, 定理 2 知, 同余方程(3) 的解数不超过 d 个. 因此, $x\equiv 1,a,\cdots,a^{d-1}\pmod p$ 恰是同余方程(3)的全部解,所以模 p 阶为 d 的数均在 $1,a,\cdots,a^{d-1}$ 之中. 由引理 3,它们当中共有 $\varphi(d)$ 个模 p 的阶为 d. 因此我们证明了: $R_d=0$ 或者 $R_d=\varphi(d)$. 于是, $R_d\leqslant\varphi(d)$. 从而

$$\sum_{d\mid p-1} R_d\leqslant\sum_{d\mid p-1}\varphi(d)=p-1$$

(最后一个等式见 §6,定理 1(iii)). 结合(2)可见,必须对每个 $d\mid p-1$ 有 $R_d=\varphi(d)$. 特别地,

$$R_{p-1}=\varphi(p-1)\geqslant 1,$$

即 $S(p-1)$ 非空. 证毕.

由定理 1 我们能够证明下面的结果.

定理 2　设 p 是奇素数,则对 $l\geqslant 2$,模 p^l 必有原根.

证明　首先,我们注意,模 p^l 的原根必然也是模 p^r 的原根,其中

$1 \leqslant r < l$.（这一简单的事实请读者自己证明.）因此，特别地，模 p^l 的原根必然在模 p 的原根之集中.

另一方面，如果模 p 的原根 g 也是模 p^l 的原根，则 g 必是模 p^2 的原根，即 g 模 p^2 的阶是 $p(p-1)$. 所以

$$g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2} \tag{4}$$

是 g 应满足的必要条件. 下面我们将证明，(4) 也是模 p 的原根 g 成为模 p^l 原根的充分条件.

第一步，我们先证明存在模 p 的原根 g 满足条件(4).

取 g 是模 p 的一个原根，如 g 满足(4)，则已无需证明. 如 g 不满足(4)，由于对任意整数 x，$g+px$ 也是模 p 的原根，而

$$\begin{aligned}(g+px)^{p-1} &\equiv g^{p-1} + p(p-1)xg^{p-2} \\ &\equiv 1 + p(p-1)xg^{p-2} \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

现在取 $x=1$，则 $g_0 = g+p$ 便满足 $g_0^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. 这就证明了我们的断言.

第二步，我们用归纳法证明，对每个正整数 r，均有

$$g^{\varphi(p^r)} = 1 + p^r k_r, \quad 其中 \quad p \nmid k_r. \tag{5}$$

当 $r=1$ 时，由我们对 g 的选取知结论成立. 设(5) 对 r 已成立，则易知

$$g^{\varphi(p^{r+1})} = (1+p^r k_r)^p \equiv 1 + p^{r+1}k_r \pmod{p^{r+2}}.$$

由于 $p \nmid k_r$（归纳假设），这表明(5) 式对 $r+1$ 也成立.

最后，我们证明 g 为模 p^l 的原根. 设 g 模 p^l 的阶为 d，则 d 是 $\varphi(p^l) = (p-1)p^{l-1}$ 的因子. 又 g 是模 p 的原根，故 $(p-1) \mid d$（引理 1(ii)）. 从而

$$d = (p-1)p^{r-1} = \varphi(p^r), \quad 其中\ 1 \leqslant r \leqslant l.$$

但是由(5) 知，当 $r < l$ 时，

$$g^{\varphi(p^r)} = 1 + p^r k_r \not\equiv 1 \pmod{p^l}.$$

因此必然 $r=l$，即 $d=\varphi(p^l)$，从而 g 是模 p^l 的原根.

定理 3　设 p 是奇素数，整数 $l\geqslant 1$，则模 $2p^l$ 必有原根.

证明　设 g 是模 p^l 的原根，则 $g+p^l$ 也是模 p^l 的原根；因 p 是奇数，故 g 与 $g+p^l$ 中必有一个是奇数，记之为 g_0. 我们证明，g_0 是模 $2p^l$ 的原根.

设 g_0 模 $2p^l$ 的阶为 d，则 $d\leqslant\varphi(2p^l)$. 另一方面，$g_0^d\equiv 1\pmod{p^l}$，而 g_0 是模 p^l 的原根，故 $\varphi(p^l)\mid d$，即 $d\geqslant\varphi(p^l)=\varphi(2p^l)$. 从而

$$d=\varphi(2p^l),$$

即 g_0 是模 $2p^l$ 的原根.

由以上的结果，我们有

定理 4　设 m 为大于 1 的整数，则模 m 有原根的充分必要条件是 $m=2,4,p^l$ 和 $2p^l$，其中 p 是奇素数，而 $l\geqslant 1$.

进一步，对这些 m，设正整数 d 是 $\varphi(m)$ 的一个约数，g 是模 m 的一个原根. 则模 m 共有 $\varphi(d)$ 个（互不同余的）阶为 d 的数，它们是

$$\{g^{\frac{\varphi(m)}{d}k}\mid 1\leqslant k\leqslant d,\quad (k,d)=1\}.$$

证明　定理中的第一个断言是定理 1—定理 3 及引理 2 的重述.

为了证明第二个断言，设 g 是模 m 的一个原根，则 $g,\cdots,g^{\varphi(m)}$ 为模 m 的缩系. 对 $1\leqslant l\leqslant\varphi(m)$，由引理 3，$g^l$ 的阶为 d 的充分必要条件是 $\dfrac{\varphi(m)}{(l,\varphi(m))}=d$，即

$$(l,\varphi(m))=\frac{\varphi(m)}{d},\tag{6}$$

令

$$\varphi(m)=dd',\quad l=d'k,$$

则(6) 等价于$(d,k)=1$,其中k满足$1\leqslant k\leqslant\frac{\varphi(m)}{d'}=d$,这样的$k$恰由$\varphi(d)$个. 由此即知结论成立.

习　题　8

1. 设p是奇素数,g是模p的一个原根. 求一g对于模p的阶.

2. 设p是奇素数. 证明:模p的任意两个原根之积不是模p的原根.

3*. 设p是一个奇素数,假设存在一个a使得对$p-1$的所有素因子q,有$a^{(p-1)/q}\not\equiv 1 \pmod p$,则$a$是模$p$的原根. 反过来的命题显然也成立.

4. 设p是奇素数,用模p存在原根来证明威尔逊定理(§5,例1).

5. 设p是奇素数,$n>1$是整数,并记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{p-1}k^n$. 用模$p$有原根来证明

$$S_n\equiv\begin{cases}0 \pmod p, & \text{如果 } p-1\mid n,\\ -1 \pmod p, & \text{如果 } p-1\nmid n.\end{cases}$$

6*. 设p是奇素数,$p>3$. 证明

(i) 模p的互不同余的原根之积$\equiv 1 \pmod p$;

(ii) 模p的互不同余的原根之和$\equiv\mu(p-1) \pmod p$.

7. 设n,a都是正整数且$a>1$,证明:$n\mid\varphi(a^n-1)$.

8. 设$n>1$,证明:$n\nmid(2^n-1)$.

9*. 设m是正整数,a和b是整数,满足$ab\equiv 1 \pmod m$. 证明:a和b对于模m的阶相等.

10*. 设m是正整数,整数a和b对于模m的阶分别是s及t,且$(s,t)=1$. 证明:ab模m的阶是st.

11*. 证明:如果有两个整数模m的阶分别为s和t,则必有一个整数模m的阶为$[s,t]$.

12*. 设 m,n 是互素的正整数，a 对于模 m 和模 n 的阶分别是 d_1 和 d_2，则 a 对于模 mn 的阶为 $[d_1,d_2]$.

13*. (i) 设 $a\geqslant 2$，p 为奇素数，证明：a^p-1 的素因子如果不整除 $a-1$，则必有形式 $2px+1$，x 为整数；

(ii) 设 p 是给定的奇素数，证明：有无穷多个素数具有 $2px+1$ 的形式.

14*. (i) 设 $F_n=2^{2^n}+1$，$n\geqslant 1$. 证明：F_n 的每个素因子都具有形式 $2^{n+1}x+1$，x 是整数.

(ii) 设 $l>1$ 是给定的整数，证明：有无穷多个素数具有 2^lx+1 的形式.

15. (i) 对 $p=3,5,7,11,13,17,19,23$，求模 p 的最小正原根；

(ii) 求模 7^2 及模 5^{10} 的一个原根.

§9. 指　　数

设模 m 有原根 g，则 $1,g,\cdots,g^{\varphi(m)-1}$ 为模 m 的缩系. 所以对每个与 m 互素的整数 a，必存在唯一的整数 k，$0\leqslant k\leqslant\varphi(m)-1$，使得

$$a\equiv g^k \pmod m.$$

上述的 k 称为 a(**对于原根 g**) **模 m 的指数**，记作 $k=\mathrm{ind}_g a$，在不引起混淆时可简记为 $\mathrm{ind}\ a$.

下面的结果表明，指数与通常的对数有许多类似的性质. 因此指数(取值为整数!)也常称为离散对数.

定理 1　设 g 是模 m 的原根，$(a,m)=(b,m)=1$. 则

(i) $\mathrm{ind}\ 1=0$ 及 $\mathrm{ind}\ g=1$；

(ii) $\mathrm{ind}\ (ab)\equiv\mathrm{ind}\ a+\mathrm{ind}\ b \pmod{\varphi(m)}$；

(iii) $\mathrm{ind}\ a^n\equiv n\ \mathrm{ind}\ a \pmod{\varphi(m)}$，其中 $n\geqslant 1$；

(iv) 如果 g_1 也是 mod m 的原根，则

$$\operatorname{ind}_g a \equiv \operatorname{ind}_{g_1} a \cdot \operatorname{ind}_g g_1 (\bmod \varphi(m));$$

(v) $a \equiv b \pmod m$ 的充分必要条件是 $\operatorname{ind} a = \operatorname{ind} b$.

证明　(i) 由定义显而易见.

(ii) 由指数的定义推出

$$g^{\operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b} = g^{\operatorname{ind} a} \cdot g^{\operatorname{ind} b} \equiv ab \equiv g^{\operatorname{ind} ab} (\bmod m).$$

故由 § 8,引理 1(ii)导出所说的结论.

(iii) 这是(ii)的推论.

(iv) 设 $x = \operatorname{ind}_{g_1} a$ 及 $g_1 \equiv g^y (\bmod m)$,则 $y \equiv \operatorname{ind}_g g_1 (\bmod \varphi(m))$. 于是

$$a \equiv g_1^x \equiv (g^y)^x (\bmod m),$$

故

$$\operatorname{ind}_g a \equiv xy \equiv \operatorname{ind}_{g_1} a \cdot \operatorname{ind}_g g_1 (\bmod \varphi(m)).$$

(v) 如果 $\operatorname{ind} a = \operatorname{ind} b$,则 $g^{\operatorname{ind} a} = g^{\operatorname{ind} b}$,即 $a \equiv b \pmod m$. 反过来,如果 $a \equiv b \pmod m$,则 $g^{\operatorname{ind} a} \equiv g^{\operatorname{ind} b} (\bmod m)$,故 $\operatorname{ind} a - \operatorname{ind} b$ 是 $\varphi(m)$ 的倍数. 但 $|\operatorname{ind} a - \operatorname{ind} b| < \varphi(m)$,所以

$$\operatorname{ind} a = \operatorname{ind} b.$$

现在我们考虑同余方程

$$x^k \equiv a \pmod m, \tag{1}$$

其中 $k \geqslant 2$, $(a,m) = 1$. 如果同余方程(1) 有解,则称 a 是**模 m 的 k 次剩余**,否则称 a 是**模 m 的 k 次非剩余**.

在模 m 存在原根的情况下,我们能够给出下面(理论上的) 判别法.

定理 2　设模 m 存在原根,$k \geqslant 2$, $(a,m) = 1$,$d = (k, \varphi(m))$. 则

(i) 同余方程(1) 有解的充分必要条件是 $d \mid \operatorname{ind}_g a$,其中 g 是模 m

的一个原根；这也等价于

$$a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1 \pmod{m}; \tag{2}$$

(ii) 在(i)中条件满足时，同余方程(1)模 m 共有 d 个解；

(iii) 模 m 的缩系中恰有 $\frac{\varphi(m)}{d}$ 个 k 次剩余.

证明　(i) 由定理 1(iii)，(v)可知，同余方程(1)等价于

$$k \cdot \mathrm{ind}_g x \equiv \mathrm{ind}_g a \pmod{\varphi(m)}, \tag{3}$$

这是关于 $\mathrm{ind}_g x$ 的一次同余方程. 由 §7，定理 1 知，同余方程(3) 有解的充分必要条件是 $d \mid \mathrm{ind}_g a$.

另一方面，$d \mid \mathrm{ind}_g a$ 显然等价于

$$\frac{\varphi(m)}{d} \cdot \mathrm{ind}_g a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \varphi(m)).$$

由定理 1(i)，(iii) 及(v) 知，这又等价于同余式(2).

(ii) 当同余方程(3) 可解时，则它模 $\varphi(m)$ 共有 d 个解，这等价于同余方程(1) 模 m 共有 d 个解.

(iii) 由(i)，a 是模 m 的 k 次剩余，等价于 $d \mid \mathrm{ind}_g a$，即 $\mathrm{ind}_g a = dl$，其中 $l = 0, 1, \cdots, \frac{\varphi(m)}{d} - 1$，从而

$$a \equiv g^0, g^d, \cdots, g^{d(\frac{\varphi(m)}{d}-1)} \pmod{m}.$$

因此模 m 的 k 次剩余共有 $\frac{\varphi(m)}{d}$ 个.

当 m 不太大时，我们能够用定理 2 的证明方法实际地解某些同余方程(1). 为了这样的目的，我们首先需求出模 m 的一个原根 g，并计算 $g^i (0 \leqslant i \leqslant \varphi(m) - 1)$ 模 m 的最小正剩余，得到模 m 的最小正缩系中每个数的指数. 将所得的结果，按指数的大小顺序或最小正缩系的大小顺序列表. 这样的表格称为(模 m 的)指数表(类似于通常的对数表)，供具体应用时查用.

例 1　解同余方程

$$x^8 \equiv 3 \pmod{11}. \tag{4}$$

解　我们求得 2 是模 11 的原根. 模 11 的指数表为

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{ind}_2\, a$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

因为同余方程(4)等价于(用指数表)

$$8\mathrm{ind}\ x \equiv \mathrm{ind}\ 3 \equiv 8 \pmod{12},$$

即 $\mathrm{ind}\ x \equiv 1 \pmod 5$. 从而

$$\mathrm{ind}\ x \equiv 1, 6 \pmod{10}.$$

于是(由指数表) $x \equiv 2, 9 \pmod{11}$.

例 2　解指数同余方程

$$7 \cdot 3^x \equiv 6 \pmod{11}. \tag{5}$$

解　利用前面给出的指数表,(5)等价于

$$\mathrm{ind}\ 7 + x\ \mathrm{ind}\ 3 \equiv \mathrm{ind}\ 6 \pmod{10},$$

即

$$8x \equiv 2 \pmod{10},$$

从而解为 $x \equiv 4 \pmod 5$.

本题也可以采用下面的方法:同余方程(5)等价于

$$3^x \equiv 4 \pmod{11}.$$

易于验证:3 模 11 的阶为 5,而当 x 模 5 同余于 0,1,2,3,4 时,3^x 模 11(周期地)依次取值 1,3,9,5,4. 因此所求之解是 $x \equiv 4 \pmod 5$.

习　题　9

1. 解同余方程：

(i) $x^8 \equiv 3 \pmod{13}$；

(ii) $x^8 \equiv 3 \pmod{143}$.

2. 用例 2 中的两种方法解同余方程：

(i) $6 \cdot 3^x \equiv 7 \pmod{11}$；

(ii) $5 \cdot 6^x \equiv 3 \pmod{13}$.

3. 解同余方程：

(i) $8x^5 \equiv 3 \pmod{17}$；

(ii) $7^x \equiv 4 \pmod{17}$.

4. 写出模 11 的全部二次剩余.

5. 写出模 37 的全部 8 次剩余及 15 次剩余.

6. 设 p 是素数，$p \equiv 2 \pmod 3$，a 和 b 是整数. 证明：

$$a^3 \equiv b^3 \pmod p$$

成立的充分必要条件是 $a \equiv b \pmod p$.

第四章　二次剩余

§10.　二次剩余

本节讨论模为素数 p 的二次同余方程

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod p,\quad p\nmid a. \tag{1}$$

当 $p=2$ 时,同余方程(1) 极易求解. 因此以后我们总设 p 为奇素数.

由于 $p\nmid 4a$, 故(1)等价于同余方程

$$(2ax+b)^2\equiv b^2-4ac \pmod p. \tag{2}$$

令 $y\equiv 2ax+b \pmod p$,由于 $p\nmid 2a$,故 x 与 y(模 p) 一一对应,因此(2)与同余方程

$$y^2\equiv b^2-4ac \pmod p$$

是等价的. 由以上讨论可见,我们只要研究形如

$$x^2\equiv a \pmod p \tag{3}$$

的同余方程. 当 $p\mid a$ 时,(3) 仅有一个解 $x\equiv 0 \pmod p$. 所以我们以下总假定 $p\nmid a$.

如果同余方程(3) 有解,则称 a 是**模 p 的二次剩余**(在不引起混淆时, 简称为二次剩余); 否则称 a 是**模 p 的二次非剩余**(简称二次非剩余)(参考 §9).

若 a 是模 p 的二次剩余,则同余方程(3) 恰有两个解. 此外,若 a 是二次剩余,则模 p 同余类 $\bar{a}$ 中每个数都是二次剩余. 对于二次非剩余也是如此.

定理 1　设 p 是奇素数,则模 p 的任一完系中恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个二次剩

余，以及$\frac{p-1}{2}$个二次非剩余；并且模 p 的全部二次剩余在数

$$1^2, 2^2, \cdots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \tag{4}$$

所属的（模 p 的）同余类中.

证明　定理的第一部分是 §9，定理 2(iii) 的推论. 也可采用下面的论证：首先我们注意，(4) 中的数彼此模 p 不同余. 这是因为，如 $x^2 \equiv y^2 \pmod p$，其中 $1 \leqslant x, y \leqslant \frac{p-1}{2}$，则

$$(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod p.$$

但 $1 < x+y < p$，故

$$x - y \equiv 0 \pmod p,$$

因此 $x = y$. 又因为模 p 的二次剩余当然（模 p）同余于 $1^2, 2^2, \cdots, (p-1)^2$；而

$$(p-k)^2 \equiv k^2 \pmod p,$$

故每个二次剩余恰与(4)中一个数模 p 同余，即模 p 的任一完系中恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个二次剩余，从而二次非剩余有 $(p-1) - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$ 个.

定理 2　设 p 为素数，则模 p 的两个二次剩余之积是二次剩余，模 p 的一个二次剩余和一个二次非剩余之积是二次非剩余，模 p 的两个二次非剩余之积是二次剩余.

证明　由 §9，定理 2(iii) 的证明可看到，取 g 是模 p 的一个原根，则模 p（互不同余）的二次剩余恰由 g^{2i} 组成 $(1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2})$，从而二次非剩余为 $g^{2i-1}(1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2})$. 由此立刻推出我们的结论.

定理 2 也可采用下面更为直接的论证：

两个模 p 的二次剩余之积显然是二次剩余. 现设 a, b 分别是模 p 的

二次剩余和二次非剩余，则有整数 x_0 使 $x_0^2 \equiv a \pmod p$. 由于 $p \nmid a$，故 $p \nmid x_0$. 于是有整数 x_0' 使 $x_0x_0' \equiv 1 \pmod p$. 如果 ab 是模 p 的二次剩余，则有整数 y_0 使 $y_0^2 \equiv ab \pmod p$. 由此易知

$$(x_0'y_0)^2 \equiv x_0'^2ab \equiv (x_0x_0')^2b \equiv b \pmod p,$$

这与 b 是二次非剩余矛盾.

最后，设 a 是模 p 的任一个二次非剩余，由于 $p \nmid a$，故若 $a_1, \cdots, a_{p-1}$ 是模 p 的缩系，则 $aa_1, \cdots, aa_{p-1}$ 也是模 p 的缩系. 无妨设 $a_1, \cdots, a_r$ 是模 p 的二次剩余，这里 $r = \frac{p-1}{2}$；则 $a_{r+1}, \cdots, a_{p-1}$ 是模 p 的二次非剩余. 上面已证明，$aa_1, \cdots, aa_r$ 是二次非剩余，所以 $aa_{r+1}, \cdots, aa_{p-1}$ 均是二次剩余. 这就证明了，任两个二次非剩余之积是二次剩余.

为了将定理 2 表达成更为简洁的形式，我们引入模 p 的**勒让德**(Legendre)**符号**：

对每个整数 a，定义

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余；} \\ -1, & \text{如果 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余；} \\ 0, & \text{如果 } p \mid a. \end{cases}$$

于是定理 2 可叙述成：当 $p \nmid ab$ 时，有

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{5}$$

不难看出，当 $p \mid ab$ 时，此式仍然成立. 由定义还可知，对给定的 p，勒让德符号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 是周期为 p 的周期函数，而同余方程(3) 的解数可表示为 $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

由于在 $p \nmid a$ 时同余方程(3) 可解的充分必要条件是 $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$，所以，问题归结为如何有效地计算勒让德符号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 的值. 在这方面首先有

定理 3(欧拉判别法则)　设 p 为奇素数,则

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\pmod p.$$

证明　当 $p|a$ 时结论显然成立. 当 $p\nmid a$ 时,由费马定理知

$$a^{p-1}\equiv 1\pmod p,$$

所以

$$(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)\equiv 0\pmod p.$$

故

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv\pm 1\pmod p.$$

但由 §9,定理 2(iii) 知,$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\pmod p$ 当且仅当 a 是模 p 的二次剩余,从而结论成立.

我们也可采用下面的论证:

当 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ 时,有整数 b 使 $b^2\equiv a\pmod p$, 于是

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv b^{p-1}\equiv 1=\left(\frac{a}{p}\right)\pmod p.$$

如果 $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$, 即 a 是模 p 的二次非剩余, 记 $r=\frac{p-1}{2}$, 并设 $a_1,\cdots,a_r$ 是模 p 全部二次剩余,则 $aa_1^{-1},\cdots,aa_r^{-1}$ 是模 p 的全部二次非剩余(定理 2). 因此 $a_1,\cdots,a_r,aa_1^{-1},\cdots,aa_r^{-1}$ 为模 p 的缩系,于是由威尔逊定理(§5,例 1)

$$\begin{aligned}a^{\frac{p-1}{2}}&\equiv a_1\cdots a_r\cdot(aa_1^{-1})\cdots(aa_r^{-1})\\&\equiv(p-1)!\equiv-1\equiv\left(\frac{a}{p}\right)\pmod p.\end{aligned}$$

作为欧拉判别法则的直接推论,我们有

推论 1　设 p 为奇素数，则

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\begin{cases}1, & \text{如 } p\equiv 1 \pmod 4,\\ -1, & \text{如 } p\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

证明　由定理 3 知，$\left(\frac{-1}{p}\right)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\pmod p$. 但这同余式两边取值均为 ± 1，而 $p\geqslant 3$，因此必然

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

推论 2　设 p 是奇素数，则

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\begin{cases}1, & \text{如 } p\equiv\pm 1 \pmod 8,\\ -1, & \text{如 } p\equiv\pm 3 \pmod 8.\end{cases}$$

证明　考虑下面 $\frac{p-1}{2}$ 个同余式：

$$\begin{aligned}p-1&\equiv 1\cdot(-1)^1\pmod p;\\ 2&\equiv 2\cdot(-1)^2\pmod p;\\ p-3&\equiv 3\cdot(-1)^3\pmod p;\\ 4&\equiv 4\cdot(-1)^4\pmod p;\\ &\vdots\\ r&\equiv\frac{p-1}{2}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\pmod p.\end{aligned}$$

这里 $r=\frac{p-1}{2}$（如果 $4\mid p-1$）或 $r=p-\frac{p-1}{2}$（如果 $4\mid p+1$）. 将这些同余式相乘，得出

$$2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(p-1)\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)!(-1)^{1+2+\cdots+\frac{p-1}{2}}\pmod p.$$

因此

$$2^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)!(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\pmod p.$$

因 $p \nmid \left(\frac{p-1}{2}\right)!$，故

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod{p},$$

由此结合定理 3(取 $a=2$) 即得结果.

设 p 是给定的奇素数，$p \nmid a$. 设 a 的标准分解为 $a = \pm q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$，则(反复用(5))有

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{\pm 1}{p}\right)\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{q_k}{p}\right)^{\alpha_k}.$$

因此，为了计算 $\left(\frac{a}{p}\right)$，只需求出

$$\left(\frac{-1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right) \text{和} \left(\frac{q}{p}\right) \quad (q \text{ 为奇素数}, q \neq p).$$

上面的两个推论计算出了 $\left(\frac{-1}{p}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{p}\right)$，于是剩下的主要问题是求 $\left(\frac{q}{p}\right)$.

对这一问题，定理 3 的价值在于理论上的，并非是实用的工具. 事实上，当给定的素数 p 不太大时，为了判别 q 是否为模 p 的二次剩余，我们往往通过直接(模 p) 计算(4) 中所列的数来确定，而不采用(计算更麻烦的) 定理 3. 当素数 p 很大时，两种方法均不实用.

另一方面，推论 1 和推论 2 确定了以 -1 及 2 为二次剩余(及非剩余) 的所有素数. 一个自然的问题是：给定 a，确定怎样的素数 p 以 a 为二次剩余.

两个问题的解答都依赖下一节中讲的二次互反律.

习　题　10

1*. 设 p 是奇素数，a,b 为整数且 $p \nmid a$. 证明

$$\sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{an+b}{p}\right)=0.$$

2. 设 p 是奇素数，n 是 $1,2,\cdots,p-1$ 中最小的模 p 二次非剩余. 证明 n 是素数.

3. (i) 证明：形如 $4n+1$ 的素数有无穷多个；

(ii) 证明：形如 $8n+3,8n+5,8n+7$ 的素数均有无穷多个.

4. 设 p 是奇素数，证明：有无穷多个素数都是模 p 的二次非剩余.

5. 设 p 与 $q=2p+1$ 都是素数. 证明

(i) 当 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时，2 是模 q 的原根；

(ii) 当 $p\equiv 3 \pmod 4$ 时，-2 是模 q 的原根.

6*. 设 p 是素数，$p\equiv 3 \pmod 4$. 记 $q=2p+1$ 及 $M_p=2^p-1$. 证明：当且仅当 q 为素数时有 $q\mid M_p$.

7. 设 p 是奇素数. 证明

$$\prod_{\substack{r=1\\ \left(\frac{r}{p}\right)=1}}^{p-1} r\equiv-\left(\frac{-1}{p}\right) \pmod p.$$

8. 设 p 是素数，$p\equiv 1 \pmod 4$. 证明

(i) $\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\ \left(\frac{r}{p}\right)=1}}^{p-1} r=\frac{p(p-1)}{4}$；

(ii) $\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1} a\left(\frac{a}{p}\right)=0$；

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{k^2}{p}\right]=\frac{(p-1)(p-5)}{24}$.

9. 设 p 是素数，$p\equiv 3 \pmod 4$，且 $p>3$. 证明

(i) $\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\ \left(\frac{r}{p}\right)=1}}^{p-1} r\equiv 0 \pmod p$；

(ii) $\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1} a\left(\frac{a}{p}\right)\equiv 0 \pmod p$.

10*. 设 p 是奇素数，a 是整数且 $p\nmid a$，则

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^2+ax}{p}\right)=-1.$$

11. 设 p 是奇素数，a 是整数.

(i) 证明：同余方程 $x^2-y^2\equiv a \pmod p$ 必有解；

(ii) 若 (x,y) 和 (x',y') 均是上述同余方程的解，当 $x\equiv x'$ 且 $y=y' \pmod p$ 时，我们将 (x,y) 和 (x',y') 看成是模 p 的同一个解. 证明：(i) 中同余方程的解数是 $p-1$（如果 $p\nmid a$）或 $2p-1$（如果 $p\mid a$）.

12*. 设 p 是奇素数，证明

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^2+a}{p}\right)=\begin{cases}-1, & \text{如果 } p\nmid a,\\ p-1, & \text{如果 } p\mid a.\end{cases}$$

13*. 设 p 是奇素数，$f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $p\nmid a$. 记

$$D=b^2-4ac.$$

证明

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{f(x)}{p}\right)=\begin{cases}-\left(\frac{a}{p}\right), & \text{如果 } p\nmid D,\\ (p-1)\left(\frac{a}{p}\right), & \text{如果 } p\mid D.\end{cases}$$

14*. 设 p 是奇素数，$k\geqslant 1$. 则同余方程 $x^2\equiv a \pmod{p^k}$ 有解的充分必要条件是 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$；并在此条件满足时，模 p^k 恰有两个解.

15*. 设 a 是奇数，则

(i) $x^2\equiv a \pmod 2$ 对所有 a 有解；

(ii) $x^2\equiv a \pmod 4$ 有解的充分必要条件是 $a\equiv 1 \pmod 4$，并且在此条件满足时，恰有两个不同的解；

(iii) 同余方程 $x^2\equiv a \pmod{2^k}$ $(k\geqslant 3)$ 有解的充分必要条件是 $a\equiv 1 \pmod 8$，并且在条件成立时恰有四个解. 如果 x_0 是一个解，则 $\pm x_0$，$\pm x_0+2^{k-1}$ 是所有解.

§11.　二次互反律

本节的主要目的是证明下面重要的结果：

定理 1(二次互反律)　设 p,q 是两个不同的奇素数，则

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}=\begin{cases}-1, & \text{如 } p\equiv q\equiv 3 \pmod 4,\\ 1, & \text{其它情形.}\end{cases}$$

注记　由 §10 我们知道，勒让德符号 $\left(\frac{p}{q}\right)$ 及 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 分别刻画了二次同余方程

$$x^2\equiv p \pmod q$$

和

$$x^2\equiv q \pmod p$$

是否可解；即 p 是否为模 q 的二次剩余及 q 是否为模 p 的二次剩余. 上面两个二次同余方程的模和剩余恰好互换了位置，而定理 1 给出了这样两个同余方程可解性的联系，因此称为二次互反律.

为了证明定理 1，我们需要一个基本的引理.

引理(高斯引理)　设 p 是奇素数，$p\nmid a$，$r=\frac{p-1}{2}$. 记 μ 是数

$$a,2a,\cdots,ra \tag{1}$$

中模 p 的最小正剩余大于 $\frac{p}{2}$ 的个数，则

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\mu}. \tag{2}$$

证明　在 $a,2a,\cdots,ra$ 被 p 除得的余数中，设 $b_1,\cdots,b_\lambda$ 与 $c_1,\cdots,c_\mu$

分别是小于$\frac{p}{2}$及大于$\frac{p}{2}$的数，这里$\lambda+\mu=r$. 由于(1)中的数彼此模p不同余，故诸b_i中无两者相同，诸$p-c_j$中也无两数相同. 又易见b_i与$p-c_j$不会有相同者；因假设有i,j使$b_i=p-c_j$，则相应地有$x,y(1\leqslant x,y\leqslant r)$使

$$ax\equiv -ay(\mathrm{mod}\ p),$$

即$a(x+y)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. 但$p\nmid a$，故有$x+y\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$；这不可能，因$1<x+y<p$.

注意到$0<p-c_j\leqslant r\ (1\leqslant j\leqslant \mu)$. 我们推出$r$个数$b_1,\cdots,b_\lambda$，$p-c_1,\cdots,p-c_\mu$是$1,2,\cdots,r$的一个排列，故

$$r!=b_1\cdots b_\lambda(p-c_1)\cdots(p-c_\mu). \tag{3}$$

将(3)模p，产生

$$r!\equiv(-1)^\mu b_1\cdots b_\lambda c_1\cdots c_\mu\equiv(-1)^\mu r!a^r(\mathrm{mod}\ p).$$

因$p\nmid r!$，故我们有$a^r\equiv(-1)^\mu(\mathrm{mod}\ p)$. 结合欧拉判别法(§10，定理3)，便证明了(2).

现在我们能够证明定理1.

第一步，在a为奇数时，我们给出公式(2)一种解析的表示形式.

由带余除法(见习题1.8)，对$1\leqslant i\leqslant r=\frac{p-1}{2}$，有

$$ai=p\left[\frac{ai}{p}\right]+r_i,\quad 0<r_i<p. \tag{4}$$

将余数r_i中小于$\frac{p}{2}$及大于$\frac{p}{2}$者分别改记为b_i与$c_j(1\leqslant i\leqslant\lambda,\ 1\leqslant j\leqslant\mu)$，并用$B$与$C$分别表示诸$b_i$的和及诸$c_j$的和. 将(4)中$r$个等式相加，得出

$$\frac{p^2-1}{8}\cdot a=pA+B+C, \tag{5}$$

其中$A=\sum\limits_{i=1}^{r}\left[\frac{ai}{p}\right]$. 另一方面，由高斯引理的证明中可见

$$b_1 + \cdots + b_\lambda + (p - c_1) + \cdots + (p - c_\mu) = 1 + 2 + \cdots r.$$

于是

$$\mu p - C + B = \frac{p^2 - 1}{8}.$$

结合(5)给出

$$\frac{p^2 - 1}{8} \cdot (a - 1) = (A - \mu)p + 2C. \tag{6}$$

注意 p 是奇数,故$\frac{p^2 - 1}{8}$ 为整数,而 $a - 1$ 是偶数;故(6) 给出

$$(A - \mu)\ p \equiv 0 \pmod 2,$$

即 $\mu \equiv A \pmod 2$. 因此,如果 $2 \nmid a$, 则由(2)得出$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^A$. 特别地,对奇素数 $q \neq p$, 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r}[\frac{qi}{p}]}.$$

类似地,我们也有

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{s}[\frac{pj}{q}]}, \quad 其中\ s = \frac{q - 1}{2}.$$

因此

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r}[\frac{qi}{p}] + \sum_{j=1}^{s}[\frac{pj}{q}]}. \tag{7}$$

第二步,我们证明

$$\sum_{i=1}^{r}[\frac{qi}{p}] + \sum_{j=1}^{s}[\frac{pj}{q}] = rs. \tag{8}$$

由此及(7)就证明了定理 1. 为此,我们考虑平面上以 $(0,0)$, $(0,\frac{q}{2})$, $(\frac{p}{2},0)$, $(0,\frac{q}{2})$ 为顶点的矩形. 显然,满足 $1 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}$, $1 \leqslant y \leqslant \frac{q}{2}$ 的整点(x,y) 共有 rs 个, 而连接$(0,0)$ 和$(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$ 两点的直线 l 将此矩形

分成两部分（图 10.1），并且上述 rs 个整点都不在直线 l 上. 这是因为若有所说的整点 (x,y) 在 l 上，则 $xq=yp$，故 $p|xq$. 因 p 和 q 为不同素数，从而 $p|x$，这不可能，因 $1\leqslant x\leqslant r<p$.

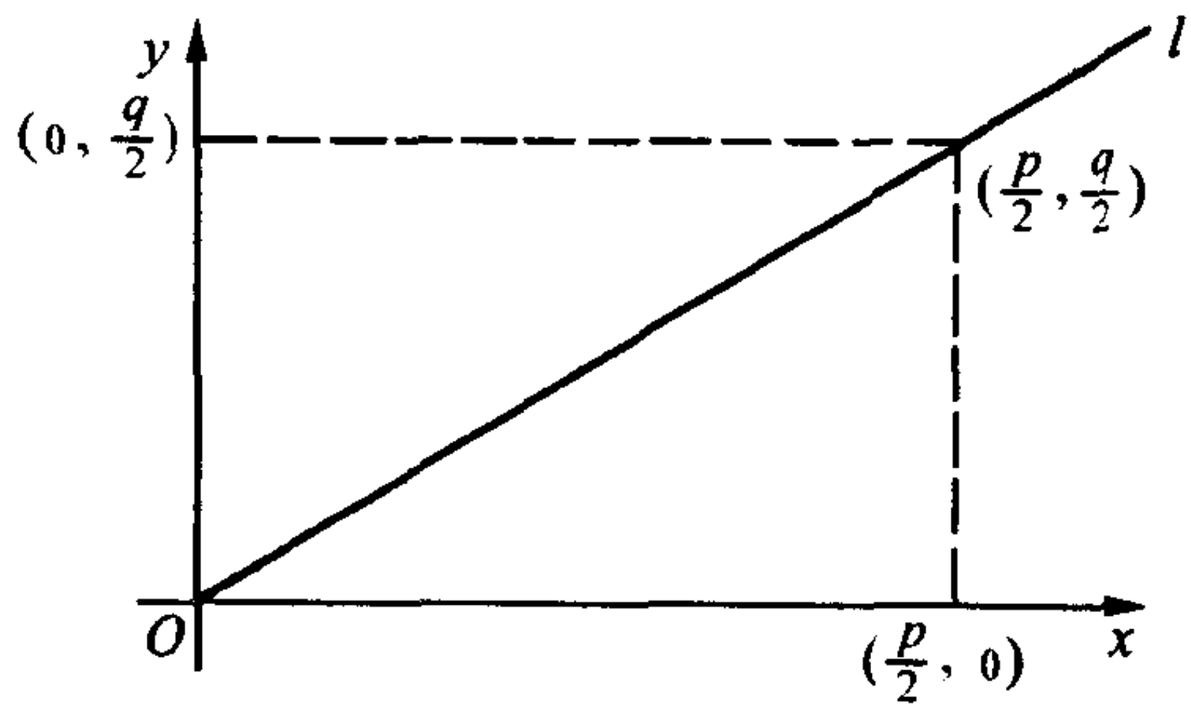


图 10.1

现在考虑直线 l 下面那部分所包含的整点个数. 由于坐标 $x=i$ 的整点为 (i,y)，其中 $1\leqslant y\leqslant\frac{qi}{p}$，因此这部分的整点共有 $\sum_{i=1}^{r}[\frac{qi}{p}]$ 个. 同样，直线 l 上面部分的整点数为 $\sum_{j=1}^{s}[\frac{pj}{q}]$ 个. 综合两方面的结果，即知 (8) 成立. 因此二次互反律得到了证明.

二次剩余的概念最早出现于欧拉 1754 年发表的论文中. 1783 年欧拉明确 地叙述了二次互反律，他的提法如下面的定理 2. 勒让德和高斯也都 独立地发现了二次互反律，定理 1 的形式就是勒让德提出的. 但是二次互反律的第一个完整证明是高斯在 1796 年给出的（当时高斯 19 岁！）. 高斯一生共给出了七个不同证明，上面讲的证明是其中之一. 二次互反律是十八世纪数论中最富于首创精神，并且能从中引出众多成果的一个伟大发现. 二次互反律的各种角度的推广，构成近代数论的一项重要内容.

用二次互反律可以有效地计算勒让德符号.

例 1　判断同余方程 $x^2 \equiv 219 \pmod{383}$ 是否有解.

解　由于 383 是素数,而 $219 = 3 \cdot 73$,从而

$$\left(\frac{219}{383}\right) = \left(\frac{3}{383}\right)\left(\frac{73}{383}\right).$$

用二次互反律

$$\left(\frac{3}{383}\right) = \left(\frac{383}{3}\right)(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{383-1}{2}} = -\left(\frac{383}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1;$$

$$\left(\frac{73}{383}\right) = \left(\frac{383}{73}\right) = \left(\frac{18}{73}\right) = \left(\frac{2}{383}\right) = 1.$$

于是 $\left(\frac{219}{383}\right) = 1$,即所说的同余方程有解.

作为二次互反律的另一个(理论上的)应用,我们(原则上)能够确定以给定的(非零)整数 a 为二次剩余的所有素数 p. 首先考虑特殊情形:$a = q$ 是一个奇素数.

定理 2　设 q 是一个奇素数.

(i) 如 $q \equiv 1 \pmod 4$,则 q 是模 p 的二次剩余的充分必要条件是 $p \equiv r \pmod q$,其中 r 是模 q 的任一个二次剩余;

(ii) 如 $q \equiv 3 \pmod 4$,则 q 是模 p 的二次剩余的充分必要条件是 $p \equiv \pm b^2 \pmod{4q}$,其中 b 是任意奇整数,且 $(b,q) = 1$.

证明　(i) 如果 $q \equiv 1 \pmod 4$,则由定理 1 知 $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$. 由此即知结论成立.

(ii) 如果 $q \equiv 3 \pmod 4$,定理 1 给出

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right). \tag{9}$$

首先设 $p \equiv \pm b^2 \pmod{4q}$,其中 b 是与 q 互素的奇数. 当

$p \equiv b^2 \pmod{4q}$ 时，我们有

$$p \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 4 \quad 及 \quad p \equiv b^2 \pmod q.$$

因此

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \quad 及 \quad \left(\frac{p}{q}\right) = 1,$$

从而 $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$；当 $p \equiv -b^2 \pmod{4q}$ 时，类似地可得出

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

以及

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-b^2}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = -1 \ (注意\ q \equiv 3 \pmod 4).$$

从而也有 $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.

反过来，假设 $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. 则由(9)得出

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \quad 且 \quad \left(\frac{p}{q}\right) = 1; \tag{10}$$

或

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \quad 且 \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1. \tag{11}$$

当(10)成立时，我们有 $p \equiv 1 \pmod 4$ 及 $p \equiv b^2 \pmod q$. 显然可设 b 是奇数(否则以 $b' = q - b$ 代替 b)，于是 $b^2 \equiv 1 \pmod 4$，故 $p \equiv b^2 \pmod 4$. 从而 $p \equiv b^2 \pmod{4q}$，其中 b 是与 q 互素的奇数.

当(11)成立时，我们有 $p \equiv 3 \pmod 4$ 及 $p \equiv -b^2 \pmod q$. 类似于前一种情形，我们可设 b 是奇数，故 $p \equiv -b^2 \pmod 4$. 从而

$$p \equiv -b^2 \pmod{4q}.$$

证毕.

对任意的(非零)整数 a,为确定使 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ 的素数 p,我们可设 a 没有平方因子,即设 $a=\pm 2q_1\cdots q_k$(q_i 是互不相同的奇素数). 由定理 2,§10 中推论 1 和推论 2 及习题 7.6 易于证明,使 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ 的素数 p 一定属于有限个固定的算术级数. 此外,狄利克雷(Dirichlet)的一个著名结果断言,公差与首项互素的算术级数中一定有无穷多个素数. 由此可证明,以 a 为二次剩余的素数有无穷多个. 事实上,更深入的方法能够证明,这样的素数在全体素数集中大致占了一半.

当 a 的素因子较少时,可以实际地确定以 a 为二次剩余的素数(所属的算术级数). 我们举一个简单例子.

例 2　确定以 6 为二次剩余的素数.

解　因 $\left(\frac{6}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$,因此 $\left(\frac{6}{p}\right)=1$ 等价于

$$\left(\frac{2}{p}\right)=1 \quad 且 \quad \left(\frac{3}{p}\right)=1; \tag{12}$$

或

$$\left(\frac{2}{p}\right)=-1 \quad 且 \quad \left(\frac{3}{p}\right)=-1. \tag{13}$$

由定理 2(ii)知,$\left(\frac{3}{p}\right)=1$ 成立的充分必要条件是

$$p\equiv\pm 1,\ \pm 5^2,\ \pm 7^2,\ \pm 11^2 \pmod{12},$$

即 $p\equiv\pm 1 \pmod{12}$. 从而满足 $p\equiv\pm 5 \pmod{12}$ 的素数以 3 为二次非剩余. 结合 §10,推论 2 可见,(12)成立等价于

$$p\equiv\pm 1 \pmod 8 \quad 且 \quad p\equiv\pm 1 \pmod{12}; \tag{14}$$

而(13)成立等价于

$$p\equiv\pm 3 \pmod 8 \quad 且 \quad p\equiv\pm 5 \pmod{12}. \tag{15}$$

解同余式组(14),(15),分别得出

$$p \equiv \pm 1 \pmod{24} \quad 及 \quad p \equiv \pm 5 \pmod{24}.$$

因此$\left(\frac{6}{p}\right)=1$的充分必要条件是$p \equiv \pm 1, \pm 5 \pmod{24}$.

习　题　11

1. 设p是奇素数,用高斯引理计算$\left(\frac{2}{p}\right)$.

2. 计算$\left(\frac{17}{23}\right),\left(\frac{19}{37}\right),\left(\frac{60}{79}\right),\left(\frac{92}{101}\right)$.

3. (i) 确定以-3为二次剩余的素数;

(ii) 确定以5为二次剩余的素数;

(iii) 确定以15为二次剩余的素数.

4. 证明:形如$6n+1$的素数有无穷多个.

5. 设$p=4k+1$是素数,a是k的约数.证明:$\left(\frac{a}{p}\right)=1$.

6. 设$p=10n-1$是素数,证明:$p \mid 5^{5n-1}-1$.

7. 设$n>1$,$p=2^n+1$是素数.证明:模p的原根之集与模p的二次非剩余之集相同;进而证明3,7都是模p的原根.

第五章　不定方程

§12.　不定方程与同余方程

所谓不定方程，大致地说，是指未知数个数多于方程的个数，而未知数的取值范围受某些限制（如整数，正整数或有理数）的方程. 不定方程是数论的一个重要课题，也是一个非常复杂和困难的课题. 为了研究一些不定方程，人们创造了许多强有力的方法和工具，但是仍有许多问题没有解决. 我们在这一章中只是简要地涉及不定方程与前面某些知识的联系，并给出不定方程中几个较为简单和基本的经典结果.

在形形色色的不定方程中，占据中心位置的是所谓的多项式不定方程，即研究方程

$$F(x_1, \cdots, x_n) = 0 \tag{1}$$

的整数解，其中 F 是一个整系数多项式. 最简单的情形当然是一次多项式方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b = 0. \tag{2}$$

容易知道（参考习题 2.10），方程(2)有整数解的充分必要条件是 a_1, $\cdots$, a_n 的最大公约数整除 b.

一般而言，判定(1)是否有解，是一个相当困难的问题. 然而，如果方程(1)有整数解，则它必须满足下面的

条件(i)　方程(1)有实数解；

条件(ii)　对所有正整数 m，方程(1) 在 $\mathbf{Z}_m$ 上有解，即同余方程

$$F(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0 \pmod{m} \tag{3}$$

有解.

这是因为，若(1)有整数解 $x_i = x_i'(1 \leqslant i \leqslant n)$. 这当然是满足(1)的实数解，并且满足同余方程(2).

注记　容易证明，条件(ii)等价于下面的

条件(iii)　对所有素数 p 及整数 $k \geqslant 1$，同余方程

$$F(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^k} \tag{4}$$

有解.

事实上，条件(ii)当然蕴含着条件(iii). 反过来，若条件(iii)成立，我们设 $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$ 是 $m > 1$ 的标准分解，并设

$$x_i \equiv x_i^{(j)} \pmod{p_j^{\alpha_j}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$$

是同余方程

$$F(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$$

的一组解. 由孙子定理知，对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，同余方程组

$$x \equiv x_i^{(j)} \pmod{p_j^{\alpha_j}} \quad (1 \leqslant j \leqslant l)$$

有解 $x \equiv x_i' \pmod{m}$. 于是，$x_i \equiv x_i' \pmod{m}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是同余方程(3)的解.

如果 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 满足上面的条件(i)和(ii)(或(iii))，则称方程(1)**局部可解**. 上面的讨论表明，方程(1)局部可解是它有整数解的必要条件. 换句话说，如果(1)没有实数解，或者有某个 $m > 1$ 使同余方程(3)无解，则方程(1)没有整数解. 由于方程(1)是否有实数解以及它在(有限集合)$\mathbf{Z}_m$ 上的可解性通常更易于把握，因此，所说的原则提供了证明某些方程无整数解(或帮助求解)的一个基本出发点.

例 1　证明方程

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 3 \tag{5}$$

没有整数解.

证明　模 4,因整数的平方模 4 同余 0 或 1,故

$$(5)\text{的左边} \equiv 0,1,2 \pmod 4),$$

但右边 $\equiv 3 \pmod 4$. 即方程(5) 在 $\mathbf{Z}_4$ 中无解,从而它没有整数解.

例 2　证明方程

$$y^2 = x^3 + 7 \tag{6}$$

没有整数解.

证明　如果(6)有解,则 x 是奇数;否则将(6) 模 4 产生

$$y^2 \equiv 3 \pmod 4),$$

这不可能. 将(6)改写成

$$y^2 + 1 = (x + 2)((x - 1)^2 + 3) \tag{7}$$

因为 $(x-1)^2+3$ 模 4 同余于 3,故它必有一个素因子 $p \equiv 3 \pmod 4$. 现在将(7) 模 p,产生 $y^2 \equiv -1 \pmod p$,即 $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, 这不可能.

另一方面,一个自然的问题是;如果条件(i)和(ii)均得到满足,是否方程(1)必然有整数解?

对于最简单的一次不定方程(2),不难看出这一问题的回答是肯定的. 但一般情况下的答案并非总如此.

例 3　证明:方程

$$(x^2 - 13)(x^2 - 17)(x^2 - 221) = 0 \tag{8}$$

有实数解,且对所有 $m > 1$, 同余方程

$$(x^2 - 13)(x^2 - 17)(x^2 - 221) \equiv 0 \pmod m \tag{9}$$

可解. 但方程(8)没有整数解.

证明　我们只要证明同余方程(9)对所有 $m>1$ 可解(其余断言均是显然的). 由前面的注记,我们只要对 $m=p^k$ 来证明就够了,其中 p 是任意素数,而 $k\geqslant 1$.

若素数 $p\neq 13,17,2$,由于

$$\left(\frac{221}{p}\right)=\left(\frac{13\cdot 17}{p}\right)=\left(\frac{13}{p}\right)\left(\frac{17}{p}\right),$$

故$\left(\frac{13}{p}\right),\left(\frac{17}{p}\right),\left(\frac{221}{p}\right)$不能同时为 -1. 因此三个同余方程

$$x^2\equiv 13 \pmod{p^k},$$
$$x^2\equiv 17 \pmod{p^k},$$
$$x^2\equiv 221 \pmod{p^k}$$

必有一个在 $k=1$ 时可解,进而它对所有 $k\geqslant 1$ 可解(参考习题 10.14),从而(9) 在 $m=p^k$ 时可解.

当 $p=13$ 或 17 时,由二次互反律知

$$\left(\frac{13}{17}\right)=\left(\frac{17}{13}\right)=1,$$

故上述结论也成立.

最后,由于 $17\equiv 1 \pmod 8$,故由习题 10.15 知,$x^2\equiv 17 \pmod{2^k}$ 对 $k\geqslant 1$ 均可解. 综合起来,就证明了我们的结论.

我们应当提及,能够证明,对于一大类重要的不定方程,条件(i)和(ii) 也是它们有整数解的充分条件. 这是数论中相当深刻和迷人的结果,称为"局部—整体原则",也称为哈塞(Hasse)原理.

习　题　12

1. 证明下面的方程没有整数解:

(i) $2x^2-5y^2=7$;

(ii) $x^2 - 2xy^2 + 5z^3 + 3 = 0$.

2. 证明:方程 $x_1^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599$ 没有整数解.

3. 证明下面的方程仅有平凡整数解 $x = y = z = 0$:

(i) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 0$;

(ii) $x^3 + 7y^3 + 49z^3 = 0$;

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$;

(iv) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

4. 求方程 $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ 的全部整数解.

5. 证明下面的方程没有整数解:

(i) $y^2 = 41x^3 + 3$;

(ii) $y^2 = x^3 - 6$.

6. 求所有正整数 m,n, 使得

$$1! + 2! + \cdots + m! = n^2.$$

§13. 费马方程

费马方程是指不定方程 $x^n + y^n = z^n$,其中 n 是大于 1 的正整数. 当 $n = 2$ 时,方程的一组正整数解相当于存在三边长为整数 x,y,z 的一个直角三角形. 我国古代《周髀算经》中就已记载有"勾广三,股修四,弦隅五",即一直角三角形三边长分别为 3,4,5. 现在我们将给出方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

的全部整数解.

显然,我们可只考虑(1)的正整数解. 其次,如果 $d = (x,y)$,则由(1)知 $d^2 | z^2$,于是 $d | z$. 令 $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$,则 x', y', z' 也满足(1),并且 $(x', y') = 1$. 因此我们只需求出(1)中满足 $(x,y) = 1$ 的正整数解,这样的解称为(1)的**本原解**.(易于看到,此时 x,y,z 实际上两两互素.)最后,x,y 不能都是奇数,否则将(1)模 4 产生

$$z^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

所以 x,y 必须一奇一偶.

因此,为了我们的目的,只需证明下面的结果.

定理 1　不定方程(1)满足

$$(x,y)=1,\quad 2\mid y \tag{2}$$

的全部正整数解可表示成

$$x=a^2-b^2,\quad y=2ab,\quad z=a^2+b^2, \tag{3}$$

其中 a,b 是满足 $a>b>0$, a,b 一奇一偶且 $(a,b)=1$ 的任意整数.

证明　我们首先证明,对(1)的任一组满足条件(2)的正整数解 x,y,z,一定存在所说的整数 a,b,使 x,y,z 具有(3)的形式.

因 $2\mid y$ 及 $(x,y)=1$,故 x,z 均为奇数且 $(x,z)=1$. 因此 $\frac{z-x}{2}$, $\frac{z+x}{2}$ 都是整数,并且

$$\begin{aligned}\left(\frac{z-x}{2},\frac{z+x}{2}\right)&=\left(\frac{z-x}{2}+\frac{z+x}{2},2\cdot\frac{z+x}{2}\right)\\&=(z,z+x)=(z,x)=1.\end{aligned}$$

将(1)分解为

$$\frac{z-x}{2}\cdot\frac{z+x}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

因上式右边是整数平方,故左边互素的两因数 $\frac{z-x}{2}$, $\frac{z+x}{2}$ 必须都是整数的平方(参考习题 2.8). 即有整数 $a>b>0$, $(a,b)=1$, 使得

$$\frac{z+x}{2}=a^2,\quad \frac{z-x}{2}=b^2,\quad y=2ab.$$

这时显然有 $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$. 又因为 z 为奇数,故 a,b 一奇一偶. 这就证明了定理 1 中第一部分.

反过来,因为

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2,$$

故若 a,b 满足定理中说的条件，则(3) 给出的数都是(1) 的正整数解. 我们需证明这样的解满足(2)，即是(1) 的本原解.

$2|y$ 是明显的. 我们来证明 $(x,y)=1$. 设 $(x,y)=d$，则 $d|x,d|z$，即

$$d|(a^2-b^2) \quad 且 \quad d|(a^2+b^2),$$

从而 $d|2a^2,d|2b^2$，于是 $d|2(a^2,b^2)$. 因 $(a,b)=1$，所以 $(a^2,b^2)=1$. 这样，必须 $d|2$. 但 a,b 一奇一偶，这意味着 $x=x^2-b^2$ 是奇数，故只能 $d=1$. 证毕.

当 $n>2$ 时，费马方程 $x^n+y^n=z^n$ 的解呈现完全不同的情形. 当 $xyz=0$ 时，费马方程显然对所有 $n\geqslant 3$ 有整数解，这些解称为方程的**平凡整数解**. 然而，费马(大约于 1637 年) 曾写下(没有证明) 下面一个令人瞩目的断言：

当 $n\geqslant 3$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 没有非平凡整数解.

这就是所谓的费马猜想. 自 1770 年欧拉首先对 $n=3$ 证明了上述断言始，几百年来，无数优秀的数学家都冲击过这一问题，虽然得出了极为丰富的成果，但均未成功. 直到 1995 年，费马的断言才被伟大的英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles) 证明.

容易看出，为了证明费马猜想，只需对 $n=4$ 及 n 为奇素数的情形来证明就够了. 在这里我们只证明 $n=4$ 时费马方程无非平凡整数解. 这一工作是费马本人完成的，他实际上证明了下面的略强的结论.

定理 2　方程

$$x^4+y^4=z^2 \tag{4}$$

没有非平凡的整数解.

证明　反证法. 设(4)有一组整数解 $x_0y_0z_0\neq 0$. 可设 $x_0>0$，$y_0>0$，$z_0>0$. 我们在所有这样的解中选取一组使 z_0 最小的解. 论证的核心是造出(4) 的另一组正整数解 r,s,t 使 $t<z_0$. 由于 z_0 已选择为最小，这

就导出矛盾.

现在 x_0, y_0 必然互素；否则就有素数 $p \mid (x_0, y_0)$，从而 $p^2 \mid z_0$. 而

$$\left(\frac{x_0}{p}\right)^4 + \left(\frac{y_0}{p}\right)^4 = \left(\frac{z_0}{p^2}\right)^2$$

表明，方程(4) 有一组新的正整数解. 但 $\frac{z_0}{p^2} < z_0$，与 z_0 的选取矛盾.

将(4)改写为

$$(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2.$$

由于 $(x_0, y_0) = 1$，故 $(x_0^2, y_0^2) = 1$. 于是 (x_0^2, y_0^2, z_0) 是方程(1) 的一组本原解. 由定理 1 知，存在整数 $a > b > 0$，$(a,b) = 1$，a,b 一奇一偶，使得(不妨设 y_0 是偶数)

$$x_0^2 = a^2 - b^2, \quad y_0^2 = 2ab, \quad z_0 = a^2 + b^2. \tag{5}$$

由

$$x_0^2 + b^2 = a^2 \tag{6}$$

及 $(a,b) = 1$ 知，(x_0, b, a) 也是方程(1) 的一组本原解；又 x_0 是奇数，故 b 是偶数. 再应用定理 1 知，存在整数 $c > d > 0$，$(c,d) = 1$，c,d 一奇一偶，使

$$x_0 = c^2 - d^2, \quad b = 2cd, \quad a = c^2 + d^2.$$

代入(5)得到

$$y_0^2 = 4cd(c^2 + d^2),$$

即

$$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = cd(c^2 + d^2).$$

因 $(c,d) = 1$，易知 $c, d, c^2 + d^2$ 两两互素. 由上式知它们都是整数的平方，即有正整数 r, s, t，使

$$c = r^2, \quad d = s^2, \quad c^2 + d^2 = t^2,$$

从而

$$r^4 + s^4 = t^2.$$

于是我们得出了(4)的一组正整数解 (r,s,t)，但

$$0 < t = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a} < \sqrt{z_0} \leqslant z_0,$$

和 z_0 的最小性矛盾.

注记　定理 2 的证明方法，称为**无穷递降法**，这是费马首先提出的一个重要方法.

采用无穷递降法证明不定方程无正整数解(满足某些限制的解)的主要步骤为：从相反的结论出发，假设存在一组正整数解，设法造出这个方程(或一个同类方程)的另一组正整数解，而新的解比原来的解"严格地小". 这里所说的严格地小，是指某一个与解有关的、取正整数值的量严格递减，这样的量可取为一组解的某个坐标(或坐标的绝对值)，或坐标的和、积等. 如果上述过程可以无限地进行下去，则由于严格递减的正整数数列只可能有有限多项，两者产生矛盾.

无穷递降法也可采用不同的形式(与上面说的实质相同)：假设存在正整数解，并从中选择一组"最小"的解；这里的最小解，是指某一个与解有关的、取正整数值的量达到最小. 论证的核心仍是设法造出方程的新的解，这新的解比已选择的解"严格地小"，由此产生矛盾. 定理 2 的证明便是这样做的，我们选择的量是方程(4)的解的第三坐标 z.

无穷递降法，并不只是用于否定的方面. 如果方程有解，那么必有一组(或几组)达到"最小"的(正整数)解. 采用递降法，经过有限步后，必然达到最小解.(参考 § 14，定理 1 的证明.)

无穷递降法，不仅限于不定方程. 一个问题，如果能从一种状态产生另一种状态，并且有一个与状态有关的、取正整数值的量严格减少，就可以使用递降法，或者导出矛盾(即问题无解)或者产生所求的解. 例如，§ 2 中的欧氏算法实质上就是一种无穷递降法：经过有限步带余除法达到"最小状态"，产生了最大公约数.(参考 § 15，定理 6 下面的注记 2，以及 § 26，定理 1 的证明.)

习　题　13

1. 证明:两个连续正整数之积不能是完全平方,也不能为完全立方.

2. 求方程 $x^y = 2^z - 1$ 的全部正整数解,其中 x,y 都大于 1.

3. 求方程 $x^y = 2^z + 1$ 的全部正整数解,其中 $y > 1$.

4. 求所有的正整数 m,n,使 $2^m + 3^n$ 是完全平方.

5. 证明:不定方程 $3^x + 4^y = 5^z$ 仅有一组正整数解 $x = y = z = 2$.

6*. 求出单位圆周上的所有有理点(即坐标均为有理数的点).

7*. 证明:边长为整数的等腰三角形的面积不能是完全平方数.

8*. 证明:边长为整数的直角三角形的面积不能是完全平方数.

§14.　两整数的平方和

本节讨论哪些正整数可以表示为两个整数的平方和,即不定方程

$$x^2 + y^2 = n, \quad n > 0 \tag{1}$$

是否有整数解.研究这一问题的基本工具是下面的恒等式,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2. \tag{2}$$

恒等式(2)蕴含着:如两个整数均可表示成两个整数的平方和,则它们的积也是两个整数的平方和.因此,我们的问题化为研究哪些素数 p 可表为两整数的平方和.由于素数 $2 = 1^2 + 1^2$.从而我们只需考虑 p 为奇素数的情形.

定理 1(欧拉 — 高斯)　设 p 为奇素数,则方程

$$x^2 + y^2 = p \tag{3}$$

有整数解的充分必要条件是 $p \equiv 1 \pmod 4$,并且此时方程(3)恰有一组正整数解(如不计解的次序).

证明　条件显然是必要的.（将方程(3) 模 4 即可看出来，也见 § 12，例 1.）

现在设 $p \equiv 1 \pmod 4$，我们分两步证明(3) 有解.

第一步，因为$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$，从而同余方程 $x^2 \equiv -1 \pmod p$ 有整数解. 我们可取其一个解 x，使 $1 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}$. 于是

$$x^2 + 1 = mp. \tag{4}$$

由于

$$0 < x^2 + 1 \leqslant \frac{p^2}{4} + 1 < p^2,$$

从而 $0 < m < p$.

第二步，论证的关键是将(4) 看作 p 的某个倍数可表为两整数平方和，即方程

$$x^2 + y^2 = mp \tag{5}$$

有整数解. 设 m_0 是使(5) 有解的最小的正整数 m，上面的论证表明 $1 \leqslant m_0 < p$. 现在我们采用无穷递降法证明 $m_0 = 1$，由此就完成了定理的证明.

如 $m_0 > 1$，设 x_1, y_1 使 $x_1^2 + y_1^2 = m_0 p$. 选取 x_0, y_0 满足

$$x_1 \equiv x_0, \quad y_1 \equiv y_0 \pmod{m_0}, \quad |x_0|, |y_0| \leqslant \frac{m_0}{2}. \tag{6}$$

如果 $x_0 = y_0 = 0$，则 m_0 是 x_1 和 y_1 的公因子，从而 $m_0 | p$，这与 $m_0 < p$ 矛盾. 所以

$$0 < x_0^2 + y_0^2 \leqslant \frac{m_0^2}{2}.$$

现在

$$x_0^2 + y_0^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 \equiv 0 \pmod{m_0},$$

从而 $x_0^2 + y_0^2 = m' m_0$，其中 $1 \leqslant m' < m_0$. 由(2)得出

$$m'm_0^2p=(x_1^2+y_1^2)(x_0^2+y_0^2)$$
$$=(x_1x_0+y_1y_0)^2+(x_1y_0-x_0y_1)^2.$$

由(6)得出

$$x_1x_0+y_1y_0\equiv x_1^2+y_1^2\equiv 0 \pmod{m_0},$$
$$x_1y_0-x_0y_1\equiv x_1y_1-x_1y_1\equiv 0 \pmod{m_0}.$$

从而

$$m'p=\left(\frac{x_1x_0+y_1y_0}{m_0}\right)^2+\left(\frac{x_1y_0-x_0y_1}{m_0}\right)^2$$

表明,当 $m=m'$ 时方程(5)也有整数解;但 $0<m'<m_0$,这与 m_0 的定义矛盾.

最后还需证明,在方程(3)有解时,(如不计解的次序)仅有一组正整数解. 设

$$p=a^2+b^2=c^2+d^2,$$

其中 a,b,c,d 都是正整数. 我们要证明 $a=c$ 或者 $a=d$. 由于

$$(ac+bd)(ac-bd)=c^2(a^2+b^2)-b^2(c^2+d^2)$$
$$\equiv 0 \pmod{p}.$$

故 $p|ac+bd$ 或者 $p|ac-bd$. 结合

$$p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2,$$

可见 $ad-bc=0$ 或者 $ac-bd=0$. 在第一种情况下,我们有

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=1,$$

即 $a=c$(且 $b=d$). 类似地,在第二种情况下有 $a=d$(且 $b=c$). 证毕.

现在我们能对任意正整数 n,给出它是否为两整数平方和的判别法则.

定理 2(高斯)　设 n 为正整数,则 n 可表为两整数平方和的充分必要条件是:如果 n 有素因子 $q \equiv 3 \pmod 4$,则 q 在 n 的标准分解中的方幂为偶数.

证明　我们用 S 记所有可表为两整数平方和的正整数之集. 则 S 具有性质:$a \in S$, $b \in S$ 蕴含着 $ab \in S$.

首先设 n 具有定理中所说的性质,其标准分解为

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s},$$

这里 p_i 和 q_j 都是奇素数,且

$$p_i \equiv 1 \pmod 4 (1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$q_j \equiv 3 \pmod 4 \ (1 \leqslant j \leqslant s).$$

因 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 都是偶数,故 $q_j^{\beta_j}$ 均是完全平方,从而属于 S;又 $2 \in S$ 及 $p_i \in S$(定理 1),反复用 S 的上述性质即知 $n \in S$.

反过来,我们要证明 S 中每个数都具有定理中所说的性质. 显然 $1 \in S$, 而 1(没有素因子) 具有所述性质. 设 S 中每个小于 n 的正整数都具有所述性质,现在考虑 n. 如果 n 没有素因子 $q \equiv 3 \pmod 4$,则已无需证明. 我们设有素数 $q \equiv 3 \pmod 4$ 使 $q \mid n$. 令 $n = x^2 + y^2$,则

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod q.$$

如果 $q \nmid xy$,则

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 \equiv -1 \pmod q,$$

于是

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = 1,$$

这与 $q \equiv 3 \pmod 4$ 矛盾. 因此 $q \mid x$ 或 $q \mid y$. 但 $q \mid x^2 + y^2$,从而 q 必为 x 和 y 的公因子. 于是

$$\frac{n}{q^2} = \left(\frac{x}{q}\right)^2 + \left(\frac{y}{q}\right)^2.$$

即 $\frac{n}{q^2}(<n)$ 为正整数并且属于 S. 由归纳假设，$\frac{n}{q^2}$ 具有定理所述的性质，从而 n 也如此.

注记　关于整数的平方和，有许多有趣和重要的结果. 除了本节中讲的定理 1 和定理 2 外，还有著名的拉格朗日四平方定理，即每个正整数都是四个整数的平方和. 此外，容易证明，形如 $4^a(8k+7)$ 的正整数不能表示成三个整数的平方和（习题 14.3）；反过来的命题也正确，这一困难的结果是勒让德于 1798 年首先证明的. 平方和问题的各种角度的研究与推广，也是现代代数与数论中一项重要内容.

习　题　14

1. 确定下面的整数中哪些可表示为两个整数的平方和：

$$54,171,282,379,487,6291,40003.$$

2*. (i) 确定哪些整数可表示为两个整数的平方差；

(ii) 证明：对任意整数 n，方程 $x^2+y^2-z^2=n$ 有无穷多组正整数解.

3*. 证明：形如 $4^a(8k+7)$ 的整数不能表示为三个整数的平方和.

4. 设 p 是素数，$p\equiv 3 \pmod 4$. 证明：对所有 $k\geqslant 1$，p^{2k} 不能表示为两个正整数的平方和.

5. 证明：对于任意给定的 $n\geqslant 1$，存在 n 个连续的正整数，其中每一个都不是两个整数的平方和.

第二部分

多　项　式

第六章　域上的一元多项式

§15. 带余除法与最大公因式

由引言中的讨论我们知道，系数在(整数环)$\mathbf{Z}$、(有理数域)$\mathbf{Q}$、(实数域)$\mathbf{R}$ 或(复数域)$\mathbf{C}$ 上的一元多项式的全体形成一个环. 类似地，我们可定义系数属于(模素数 p 的剩余类域)$\mathbf{F}_p$ 的多项式，以及加法、乘法、次数、恒为零等概念，并且易于验证所有这样的多项式也成为一个环，记作 $\mathbf{F}_p[x]$. 此外，我们通常将 $\mathbf{F}_p$ 中加法零元 $\bar{0}$ 及 $\mathbf{F}_p[x]$ 中零多项式 $\bar{0}$ 均简记为 0，而不作特别申明. 同样地，$\mathbf{F}_p$ 中乘法单位 $\bar{1}$ 简记为 1(在乘积中略去不写). 这样做的目的是便于统一地表述结论及其论证.

本章中，我们讲述系数属于域 K 的多项式环 $K[x]$ 的基本性质，这里 K 代表 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{F}_p$.

每个非零多项式，都对应一个非负整数，即它的次数. 这一简单的事实允许我们能够像在 $\mathbf{Z}$ 中那样对多项式作归纳论证. 我们将看到，第一章中证明 $\mathbf{Z}$ 具有唯一分解性的程序对于 $K[x]$ 仍然适用. 读者可对比地看 $\mathbf{Z}$ 上的论证与本节及下一节的处理手法.

下面的定理 1 是涉及多项式次数的基本结果(可比较 $\mathbf{Z}$ 上绝对值的性质).

定理 1　设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $K[x]$ 中非零多项式.

(i) 如 $f(x)+g(x)$ 非零，则 $\deg(f+g)\leqslant\max(\deg f,\deg g)$；

(ii) $\deg fg=\deg f+\deg g$.

证明　(i) 是显然的. 我们注意，这比绝对值所满足的三角不等式

强.

为了证明(ii),我们设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0,$$

其中 $a_n \neq 0$ 及 $b_m \neq 0$. 由多项式的乘法规则知

$$f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \text{低次项}.$$

因 $a_n b_m \neq 0$,从而

$$\deg fg = n + m = \deg f + \deg g.$$

推论　设 $f(x), g(x)$ 是 $K[x]$ 中非零多项式,则 $f(x)g(x)$ 也是非零多项式. 即 $K[x]$ 是一个无零因子环,从而其中(乘法)消去律成立.

注记　显然,当 K 取为 $\mathbf{Z}$ 时,定理 1 及推论中的结论仍然成立.

$K[x]$ 中的整除概念与 $\mathbf{Z}$ 中的整除性类似. 设 $f(x)$, $g(x) \in K[x]$, $g(x)$ 不为零. 如果存在 $h(x) \in K[x]$,使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$(在 $K[x]$ 中)**整除** $f(x)$,记作 $g(x) \mid f(x)$. 我们将 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个**因式**,而 $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的一个**倍式**. 如不存在上述的 $h(x)$,就说 $g(x)$ **不整除** $f(x)$,记作 $g(x) \nmid f(x)$.

容易看到,对任意 $f(x) \in K[x]$,K 中任意非零常数均是其因式,而如果 $f(x) \neq 0$,则 $f(x)$ 也是它自身的一个因式. 此外,对 $f(x)$ 的任一因式 $g(x)$,唯一地决定了 $f(x)$ 的一个首项系数为 1 的因式 $g^*(x)$,其中 $\deg g = \deg g^*$.

由整除的定义,不难证明下面的结果(可比较 § 1,定理 1).

定理 2　设 $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$.

(i) 如 $g(x) \mid f(x)$,且 $h(x) \neq 0$,则 $g(x)h(x) \mid f(x)h(x)$. 反之亦

然；

(ii) 如 $g(x)|h(x)$，且 $h(x)|f(x)$，则 $g(x)|f(x)$；

(iii) 如 $g(x)|f(x)$，$g(x)|h(x)$，则对任意的 $\alpha(x),\beta(x)\in K[x]$，有

$$g(x)|(\alpha(x)f(x)+\beta(x)h(x));$$

(iv) 如 $g(x)|f(x)$，则或者 $f(x)=0$，或者 $\deg g\leqslant\deg f$. 此外，如果 $g(x)|f(x)$ 且 $f(x)|g(x)$，则

$$f(x)=cg(x),$$

这里 $c\in K$，$c\neq 0$.

证明　(i)—(iii)均是显然的，而(iv)可由定理 1(ii)推出来.

下面的定理 3 表明，域上的(一元)多项式环中能够建立带余除法，这是 **Z** 上带余除法的类似(§1，定理 2 及其注记)，多项式的次数起着与整数的绝对值相同的作用.

定理 3　设 $f(x),g(x)\in K[x]$，且 $g(x)\neq 0$. 则存在 $K[x]$ 中多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \tag{1}$$

其中 $r(x)$ 或者为零，或者 $\deg r<\deg g$；并且**商式** $q(x)$ 及**余式** $r(x)$ 由这些条件唯一决定.

证明　如果 $f(x)=0$，或者 $\deg f<\deg g$，则可取 $q(x)=0$，$r(x)=f(x)$. 如 $g(x)$ 是常数，则可取 $q(x)=f(x)$，$r(x)=0$；我们因此设

$$\deg f\geqslant\deg g>0.$$

记 n,m 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数，a_n,b_m 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首项系数. 令 $q_1(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}$，并记

$$f_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x).$$

易见或者 $f_1(x) = 0$ 或 $\deg f_1 < \deg f$. 如 $\deg f_1 \geqslant \deg g$，则对 $f_1(x)$ 重复上面过程. 如此进行，我们得出一列多项式

$$f_1(x), \cdots, f_i(x), \cdots, \quad 及 \quad q_1(x), \cdots, q_i(x), \cdots,$$

使得

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) - q_{i+1}(x)g(x),$$

而

$$\deg f > \deg f_1 > \cdots > \deg g.$$

这一过程有限步后必然停止，即存在 l 使

$$f_l(x) = 0 \text{ 或 } \deg f_l < \deg g(\text{参考 §13，定理 2 的注记}).$$

于是 $q(x) = q_1(x) + \cdots + q_l(x)$ 及 $r(x) = f_l(x)$ 便给出了所说的表示.

为了证明唯一性. 假设 $f(x)$ 有两种符合定理中要求的表示法：

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x).$$

那么

$$(q_1(x) - q_2(x))g(x) = r_2(x) - r_1(x).$$

上式右边或者为零，或者次数 $< \deg g$；而左边或者是零，或者次数 $\geqslant \deg g$（参见定理 1）. 因此必须两边均为零，从而

$$q_1(x) = q_2(x) \text{ 及 } r_1(x) = r_2(x).$$

注记　1. 设 K' 是一个域，$K \subset K'$，我们称 K' 是 K 的一个扩张. 显然 $K[x] \subset K'[x]$，故定理 3 中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可看作 $K'[x]$ 中多项式，且 $g(x)$ 在 $K'[x]$ 中不为零. 由 $K'[x]$ 中带余除法的唯一性可知，在 $K'[x]$ 中以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 产生的除法算式与 $K[x]$ 中的算式(1)相同. 因此，带余除法算式不随域的扩张而改变.

2. 由于 $\mathbf{Z}$ 上不能作除法运算，由此易见 $\mathbf{Z}[x]$ 上不能建立像定理 3 那样的带余除法. 然而，如果 $f(x), g(x) \in \mathbf{Z}[x]$，$g(x) \neq 0$，且 $g(x)$

的首项系数为 1. 则与定理 3 相同的论证知，存在唯一确定的 $q_1(x)$，$r_1(x) \in \mathbf{Z}[x]$，使

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \tag{2}$$

其中 $r_1(x)$ 或者为零，或者 $\deg r_1 < \deg g$.

对任一包含 $\mathbf{Z}$ 的域 K（例如复域 $\mathbf{C}$），整系数多项式 $f(x)$，$g(x)$ 可看作 $K[x]$ 中多项式，则由定理 3 知，等式(1)必然与(2)相同. 特别地，(1) 中的 $q(x)$ 及 $r(x)$ 分别与 $q_1(x)$ 及 $r_1(x)$ 恒等，均是整系数多项式.

由定理 3 及 §1，定理 3 的相同论证，我们有下面的

定理 4　设 J 是 $K[x]$ 的一个非空子集，具有下面的性质

(i) 对任意 $f(x), g(x) \in J$，有 $f(x) - g(x) \in J$；

(ii) 对任意 $f(x) \in J$ 及 $h(x) \in K[x]$，有 $f(x)h(x) \in J$.

则或者 $J = \{0\}$，或者存在唯一的首项系数是 1 的 $d(x) \in K[x]$，使 $J = (d(x))$. 这里（及以后）记号 $(d(x))$ 表示集合

$$\{d(x)h(x) \mid h(x) \in K[x]\}.$$

证明　如果 $J \neq \{0\}$，则 J 中有非零的多项式，设 $d(x)$ 是其中次数最低的（之一）；并且由(ii)可设 $d(x)$ 首项系数是 1. 我们证明 J 中任一多项式都是 $d(x)$ 的倍式. 事实上，对任意 $f(x) \in J$，由定理 3，存在 $q(x), r(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r < \deg d$. 如 $r(x) = 0$ 则我们的断言成立. 否则，由于 $q(x)d(x) \in J$，故

$$r(x) = f(x) - d(x)q(x) \in J.$$

但 $\deg r < \deg d$，这与 $d(x)$ 的选取矛盾.

如果 $d_1(x)$ 是另一个首项系数为 1 的多项式，使 $J = (d_1(x))$. 则 $d(x) \mid d_1(x)$ 及 $d_1(x) \mid d(x)$. 从而必有 $d(x) = d_1(x)$（定理 2(iv)）. 因

此 $d(x)$ 是由 J 唯一决定的.

注记　满足定理 4 中条件的集合 J,称为 $K[x]$ 的理想. 定理 4 表明,$K[x]$ 中每个理想都是主理想,即由一个多项式的所有倍式构成. 因此 $K[x]$ 也是主理想环(参考 §1,定理 3 的注记).

由定理 4,我们推出

定理 5　设 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 是 $K[x]$ 中(有限个)不全为零的多项式. 记

$$J=\{f(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)+\cdots+h(x)\gamma(x)\mid\alpha(x),\beta(x),\cdots,\gamma(x)\in K[x]\}.$$

则存在唯一的首项系数是 1 的多项式 $d(x)\in J$,使 $J=(d(x))$.

容易看出,定理 5 中的 $d(x)$ 整除 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$,即 $d(x)$ 是 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的一个公因式. 又由于 $d(x)\in J$,故存在 $\alpha(x)$, $\beta(x),\cdots,\gamma(x)\in K[x]$, 使得

$$f(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)+\cdots+h(x)\gamma(x)=d(x).$$

因此,如 $d_1(x)$ 是 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的任一公因式,则有 $d_1(x)\mid d(x)$,从而

$$\deg d_1\leqslant\deg d.$$

由此易见 $d(x)$ 是 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的唯一的次数最高且首项系数是 1 的公因式,我们将它定义为 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的**最大公因式**,记作

$$d(x)=(f(x),g(x),\cdots,h(x)).$$

当 $(f(x),g(x),\cdots,h(x))=1$ 时,则称 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 在 K 上**互素**,换句话说,$f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 是互素的,指它们的公因式只有 $K[x]$ 中的非零常数.

由定理 5 推出

推论　设 $f(x),g(x),\cdots,h(x)\in K[x]$ 且不全为零，则存在 $\alpha(x),\beta(x),\cdots,\gamma(x)\in K[x]$，使得

$$\begin{aligned}&f(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)+\cdots+h(x)\gamma(x)\\=&(f(x),g(x),\cdots,h(x)).\end{aligned}$$

这称为 $K[x]$ 上的**裴蜀等式**. 特别地，如果 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 互素，则存在 $\alpha(x),\beta(x),\cdots,\gamma(x)\in K[x]$，使得

$$f(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)+\cdots+h(x)\gamma(x)=1.$$

由上述推论极易建立(域上的)多项式的最大公因式的基本性质(与整数的最大公约数的性质类似，参见 § 2，定理 3 及其证明).

定理 6　(i) $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的任一公因式一定整除它们的最大公因式；

(ii) 设 $(f(x),r(x))=(g(x),r(x))=1$，则

$$(f(x)g(x),r(x))=1.$$

一般地，如果 $K[x]$ 中若干个多项式均与 $r(x)$ 互素，则它们的积也与 $r(x)$ 互素；

(iii) 设 $g(x)\mid f(x)h(x)$，且 $(g(x),h(x))=1$，则

$$g(x)\mid f(x).$$

注记　1. 上述最大公因式的定义的合理性依赖于定理 5(从而依赖于定理 4)，这与整数中最大公约数的定义不完全相同，因为若干个整数的最大的公约数的存在性与唯一性是不言自明的，但在多项式的情形则并非如此.

2. 设 $f(x),g(x),\cdots,h(x)\in K[x]$，则易知

$$(f(x),g(x),\cdots,h(x))=((f(x),g(x)),\cdots,h(x)).$$

由此可见，求 $K[x]$ 中两个以上的多项式的最大公因式，归结为求两个多项式的最大公因式. 对这一问题，我们有以下的**欧几里德算法**（类似于整数中的手法，参考 §13，定理 2 的注记）：

设 $f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$. 因 $\deg g$ 是一个（有限）整数，于是按下述方式反复作带余除法，有限步后必然停止（即余式为零）：

以 $g(x)$ 除 $f(x)$：

$$f(x) = g(x)q(x) + r_0(x),\ \deg r_0 < \deg g;$$

以 $r_0(x)$ 除 $g(x)$：

$$g(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),\ \deg r_1 < \deg r_0;$$

$$\vdots$$

以 $r_{n-1}(x)$ 除 $r_{n-2}(x)$：

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x),\ \deg r_n < \deg r_{n-1};$$

以 $r_n(x)$ 除 $r_{n-1}(x)$：

$$r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x).$$

则易于证明

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{a} r_n(x),$$

其中 a 是 $r_n(x)$ 的首项系数.

3. 由欧氏算法可见，$K[x]$ 中多项式的最大公因式可以仅用 K 中元素的四则运算求得（而不依赖于 K 的特殊性质）. 此外，$K[x]$ 中带余除法的算式不随域 K 的扩张而改变（参考定理 3 的注记 1）. 因此，如 K' 是 K 的一个扩张，则 $K[x]$ 中多项式 $f(x), g(x), \cdots, h(x)$ 在 $K[x]$ 中的最大公因式 $d(x)$，与它们（看作 $K'[x]$ 中多项式）在 $K'[x]$ 中的最大公因式 $d_1(x)$ 相同. 即最大公因式是不随域的扩张而改变的“绝对量”. 例如，若 $\mathbf{Q}[x]$ 中若干多项式在 $\mathbf{Q}$ 上互素，则它们在 $\mathbf{C}$ 上也互素.

证明上述的 $d(x)$ 与 $d_1(x)$ 相等，也可采用下面的方法：由定理 5 的推论知，存在 $\alpha(x), \beta(x), \cdots, \gamma(x) \in K[x]$，使得

$$f(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x) + \cdots + h(x)\gamma(x) = d(x).$$

上式在 $K_1[x]$ 中仍成立，故有 $d_1(x)|d(x)$. 另一方面，$d(x)$ 是 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 在 $K_1[x]$ 中的一个公因式，故 $d(x)|d_1(x)$. 由于 $d(x)$ 与 $d_1(x)$ 首项系数都是 1，因此 $d(x)=d_1(x)$.

习　题　15

1. (i) 设 n 是正整数，$\alpha\in K$. 证明：$x-\alpha$ 整除 $x^n-\alpha^n$；

(ii) 设 n 是正奇数，$\alpha\in K$. 证明：$x+\alpha$ 整除 $x^n+\alpha^n$.

2. 对下面的情形，用欧氏算法求 $(f(x),g(x))$：

(i) $K=\mathbf{Q}$, $f(x)=x^3+x-1$, $g(x)=x^2+1$；

(ii) $K=\mathbf{F}_2$, $f(x)=x^7+\bar{1}$, $g(x)=x^6+x^5+x^4+\bar{1}$；

(iii) $K=\mathbf{F}_3$, $f(x)=x^8+\bar{2}x^5+x^3+x^2+\bar{1}$, $g(x)=\bar{2}x^6+x^5+\bar{2}x^3+\bar{2}x^2+\bar{2}$.

3. 设 m,n 为正整数，证明：$K[x]$ 上多项式 x^m-1 与 x^n-1 的最大公因式是 $x^{(m,n)}-1$.

4. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素. 则对任意正整数 n，$f(x^n)$ 与 $g(x^n)$ 也互素.

5*. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$ 且均非常数，$d(x)=(f(x),g(x))$，则存在 $\alpha(x),\beta(x)\in K[x]$，使得

$$d(x)=f(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x);$$

并且 $\deg\alpha<\deg g$，$\deg\beta<\deg f$.

6. 求有理系数多项式 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$，使得

$$x^3\alpha(x)+(1-x)^2\beta(x)=1.$$

7*. 设 $q(x)\in K[x]$，$q(x)\neq 0$. 证明：对任意 $f(x)\in K[x]$，存在多项式 $\alpha_0(x),\cdots,\alpha_m(x)$，使得

$$f(x)=\alpha_m(x)q^m(x)+\cdots+\alpha_1(x)q(x)+\alpha_0(x),$$

其中 $\alpha_i(x)$ 或者是零，或者 $\deg\alpha_i<\deg q\,(0\leqslant i\leqslant m)$；并且 $\alpha_0(x),\cdots,$

$\alpha_m(x)$ 由这些条件唯一决定. 上述表达式,称为 $f(x)$ 的 **$q(x)$ 进制展开**.

8*. 设 $f(x),g(x),\cdots,h(x)\in K[x]$,且均不为零.

(i) 证明: $f(x)$, $g(x)$, $\cdots$, $h(x)$ 的公倍式中,必有唯一的首项系数是 1 且次数最小的多项式,我们称之为 $f(x)$, $g(x)$,$\cdots$, $h(x)$ 的最小公倍式,记作$[f(x),g(x),\cdots,h(x)]$;

(ii) 证明:$f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的最小公倍式整除它们的任一公倍式;

(iii) 如 $f(x),g(x)$ 均不为零,则

$$a^{-1}f(x)g(x)=(f(x),g(x))[f(x),g(x)],$$

这里 a 是 $f(x)g(x)$ 的首项系数;

(iv) 证明: $[f(x),g(x),\cdots,h(x)]=[[f(x),g(x)],\cdots,h(x)]$;

(v) 如果 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 两两互素,则

$$[f(x),g(x),\cdots,h(x)]=a^{-1}f(x)g(x)\cdots h(x),$$

这里 a 是 $f(x)g(x)\cdots h(x)$ 的首项系数.

9. 设 $m>1$ 且不是素数,记 $\mathbf{Z}_m[x]$ 是以 $\mathbf{Z}_m$ 中元素为系数的全体多项式,并按通常的方式定义其中的加法与乘法. 证明

(i) $\mathbf{Z}_m[x]$ 是一个交换环;

(ii) $\mathbf{Z}_m[x]$ 中有零因子, 即存在 $f(x),g(x)\in\mathbf{Z}_m[x]$, 且 $f(x)\neq\bar{0},g(x)\neq\bar{0}$,使 $f(x)g(x)=\bar{0}$. 事实上,$\mathbf{Z}_m[x]$ 中有无穷多个零因子;

(iii) $\mathbf{Z}_m[x]$ 中不能作带余除法. 确切地说, 存在 $f(x)$, $g(x)\in\mathbf{Z}_m[x]$ 且 $g(x)\neq\bar{0}$,但没有 $q(x),r(x)\in\mathbf{Z}_m[x]$, 满足

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $r(x)$ 或是零,或 $\deg r<\deg g$.

§16. 唯一分解定理

一个多项式 $p(x)\in K[x]$ 称为 **K 上的不可约多项式**, 是指

$\deg p \geqslant 1$，而 $p(x)$ 在 K 上仅平凡分解，即如果有一个分解 $p(x) = f(x)g(x)$，其中 $f(x), g(x) \in K[x]$，则

$$\deg f = 0 \quad 或 \quad \deg g = 0.$$

因此，除了一个常数倍数外，$p(x)$ 的因式只有其自身和 1（与 $\mathbf{Z}$ 中素数类似）. 显然，如 $p(x) \in K[x]$ 是不可约多项式，则对任意 $a \in K$ $(a \neq 0)$，$ap(x)$ 也是 $K[x]$ 中不可约多项式.

我们注意，与最大公因式不同，多项式的不可约性可能随域的扩张而改变. 例如，$x^2 + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可约，但在 $\mathbf{C}$ 上可约.（参考 §15，定理 6 下面的注记 3.）

容易知道，$K[x]$ 中任一非常数多项式必有一个不可约多项式因式；此外，设 $p(x) \in K[x]$ 是一个不可约多项式，则对任意 $f(x) \in K[x]$，或者有 $p(x) \mid f(x)$，或者 $(p(x), f(x)) = 1$. 这些简单的事实可按定义与整数的情形类似地证明（参考 §3）.

定理 1　$K[x]$ 中有无穷多个首项系数为 1 的不可约多项式.

证明　当 K 是无限域时，结论显然成立. 因对任意 $a \in K$，一次多项式 $x - a$ 都是 $K[x]$ 中不可约多项式. 如果 K 为有限域 $\mathbf{F}_p$，这一证明不能奏效. 此时我们采用欧几里德关于素数有无穷多个的论证（参考 §3，定理 1）：

设 $\mathbf{F}_p[x]$ 中仅有有限多个首项系数为 1 的不可约多项式，它们的全体是 $p_1(x), \cdots, p_k(x)$. 考虑 $\mathbf{F}_p[x]$ 中非常数多项式

$$f(x) = p_1(x) \cdots p_k(x) + \bar{1}.$$

$f(x)$ 必有首项系数为 1 的不可约因式 $q(x) \in \mathbf{F}_p[x]$，而 $q(x)$ 不同于 $p_i(x)(1 \leqslant i \leqslant k)$；否则 $q(x) \mid \bar{1}$，产生矛盾. 这一证明当然也适用于 K 为无限域的情形.

由 §15，定理 6(iii) 可推出不可约多项式的下述重要性质（类似于 §3，定理 2）.

定理 2　设 $p(x)$ 是 $K[x]$ 中不可约多项式，如果 $K[x]$ 中多项式 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 的积被 $p(x)$ 整除，则 $f(x),g(x),\cdots,h(x)$ 中（至少）有一个被 $p(x)$ 整除.

现在我们叙述并证明本节的主要结果：$K[x]$ 中的唯一分解定理（比较 §3，定理 3）.

定理 3　$K[x]$ 中任一正次数的多项式可分解为 $K[x]$ 中有限个首项系数为 1 的不可约多项式与 K 中常数之积；并且这些不可约多项式是唯一决定的（如不计它们在乘积中的次序）.

证明　分解的存在性是平凡的. 设 $f(x)\in K[x]$ 且 $\deg f\geqslant 1$. 如 $f(x)$ 不可约，则

$$f(x)=a\cdot(\frac{1}{a}f(x))$$

即是所需的分解（这里 a 是 $f(x)$ 的首项系数）. 如 $f(x)$ 可约，设 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x),h(x)\in K[x]$，且 $0<\deg g,\deg h<\deg f$. 由此，所说的结论不难通过对 $\deg f$ 归纳而证明.

为了证明分解的唯一性，我们仍对 $\deg f$ 归纳. 当 $\deg f=1$ 时结论显然成立. 设结论对次数小于 n 的多项式已证明，现考虑 $\deg f=n$ 的情形. 设 $f(x)$ 有两种分解

$$f(x)=ap_1(x)\cdots p_k(x)=aq_1(x)\cdots q_l(x),$$

其中 $p_i(x),q_i(x)$ 均是 $K[x]$ 中首项系数为 1 的不可约多项式，$a\in K$. 由定理 2 知，$p_1(x)$ 整除某个 $q_i(x)(1\leqslant i\leqslant l)$，无妨设 $p_1(x)|q_1(x)$. 但 $q_1(x)$ 是（首项系数为 1 的）不可约多项式，故必须有

$$p_1(x)=q_1(x).$$

设

$$g(x)=ap_2(x)\cdots p_k(x)=aq_2(x)\cdots q_l(x).$$

如 $g(x)$ 是常数，则已证毕；如 $\deg g \geqslant 1$，因 $\deg g < \deg f$，故由归纳假设知，$g(x)$ 的分解唯一，即 $k = l$ 且 $p_2(x), \cdots, p_k(x)$ 是 $q_2(x), \cdots, q_l(x)$ 的一个排列. 证毕.

在 $f(x)$ 的上述分解中，设 $p_1(x), \cdots, p_l(x)$ 是出现的互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式，则 $f(x)$ 可表示为乘积

$$f(x) = a p_1^{m_1}(x) \cdots p_l^{m_l}(x), \quad a \in K,$$

其中 $m_1, \cdots, m_l$ 是正整数，由 $p_1(x), \cdots, p_l(x)$ 唯一决定. 上面的分解称为 $f(x)$ 的**标准分解**. 由 §15，定理 1(ii)可见

$$m_1 \deg p_1 + \cdots + m_l \deg p_l = \deg f.$$

注记　§15 与 §16 中的论证与结果可概括为一句话：域上的一元多项式环类似于整数环. 现在我们总结一下两者(主要的)类似性：

首先，$K[x]$ 中的运算与 $\mathbf{Z}$ 中的运算类似(参考引言)；$K[x]$ 中非零多项式的次数，相当于 $\mathbf{Z}$ 中整数的绝对值；$K[x]$ 中的非零常数相当于 $\mathbf{Z}$ 中的数 ± 1；$K[x]$ 中首项系数为 1 的不可约多项式，相当于 $\mathbf{Z}$ 中的素数；并且 $K[x]$ 与 $\mathbf{Z}$ 有相似的带余除法，以此为工具，可以证明：

(i) $\mathbf{Z}$ 中每个非零理想均是主理想，并且由其中绝对值最小的非零数的倍数组成；

(i)′ $K[x]$ 中每个非零理想均是主理想，并且由其中次数最低的多项式的倍式组成.

(参考 §1，定理 3 以及 §15，定理 4.)

由上面的(i)及(i)′可类似地建立 $\mathbf{Z}$ 上最大公约数与 $K[x]$ 上最大公因式的基本性质. 特别地，能够证明：

(ii) 如 p 是 $\mathbf{Z}$ 中的素数，且 $p \mid ab$，则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$；

(ii)′ 如 $p(x)$ 是 $K[x]$ 中的不可约多项式，且 $p(x) \mid f(x)g(x)$，则

$$p(x) \mid f(x) \text{ 或 } p(x) \mid g(x).$$

(参考 §3，定理 2 及 §16，定理 2.)

最后，用(ii)及(ii)′可类似地证明 $\mathbf{Z}$ 及 $K[x]$ 均是唯一分解环.

习　题　16

1. 设 $p(x) \in K[x]$ 且 $\deg p \geqslant 1$. 如果对 $K[x]$ 中任意多项式 $f(x)$，或者有 $p(x) \mid f(x)$ 或有 $(p(x), f(x)) = 1$. 证明：$p(x)$ 是不可约多项式.

2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 且均非常数. 用 $f(x), g(x)$ 的标准分解表示它们的最大公因式及最小公倍式.

3*. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 且 $g(x) \neq 0$. 表达式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 K 上的**有理分式**.

(i) 设 $g(x) = a(x)b(x)$，其中 $a(x)$ 与 $b(x)$ 互素且均非常数；假设 $\deg f < \deg g$，则存在唯一确定的 $r(x), s(x) \in K[x]$，$\deg r < \deg a$，$\deg s < \deg b$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r(x)}{a(x)} + \frac{s(x)}{b(x)};$$

(ii) 设 $g(x)$ 首项系数为 1，其标准分解是 $g(x) = \prod\limits_{i=1}^{l} p_i^{m_i}(x)$. 假设 $\deg f < \deg g$. 则存在唯一确定的多项式 $h_i(x) \in K[x]$，$\deg h_i < m_i \deg p_i (1 \leqslant i \leqslant l)$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h_1(x)}{p_1^{m_1}(x)} + \cdots + \frac{h_l(x)}{p_l^{m_l}(x)};$$

(iii) 设 $p(x) \in K[x]$ 是不可约多项式，m 是正整数. 则对任意 $h(x) \in K[x]$，$h(x) \neq 0$ 且 $\deg h < m \deg p$，存在唯一确定的多项式 $\alpha_i(x) \in K[x]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$，使得

$$\frac{h(x)}{p^m(x)} = \frac{\alpha_m(x)}{p(x)} + \cdots + \frac{\alpha_1(x)}{p^m(x)},$$

其中 $\alpha_i(x)$ 或者为零，或者 $\deg \alpha_i < \deg p$；

(iv) 证明：每一个分子的次数小于分母的次数，且分母有标准分解

$$f(x) = p_1^{m_1}(x)\cdots p_l^{m_l}(x)$$

的有理分式 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 是**部分分式**的和，每个部分分式的分母是 $p_i^{k_i}(x)$ $(k_i = 1,\cdots,m_i,\ i = 1,\cdots,l)$，而分子或者是零，或者其次数小于 $\deg p_i$.

4. 将 $\mathbf{R}$ 上的有理分式

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+2)},\quad \frac{x^4+2}{x(x^2+1)^2}$$

表示成部分分式的和.

§17. 多项式的零点

本节只需域 K 上的加、减、乘法运算，而无需作除法. 因此我们改用 D 表示环 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{F}_p$.

设 $f(x) = a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0 \in D[x]$. 对任意 $\alpha \in D$，令

$$f(\alpha) = a_k\alpha^k + \cdots + a_1\alpha + a_0. \tag{1}$$

则 $f(\alpha) \in D$. 由此对 $D[x]$ 中每个多项式，联系了一个由 D 映射到自身的**多项式函数**，多项式环 $D[x]$ 中不定元 x 可称为 D 上的变量. 表达式 (1) 称为 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 时的值，也称为 $f(x)$ 中以 α 代入.

由于我们约定了不定元 x 与 D 中元素的(形式)运算适合 D 中元素的运算规律(参考引言)，因此，如果

$$f(x) + g(x) = h(x),\quad f(x)g(x) = k(x),$$

则

$$f(\alpha) + g(\alpha) = h(\alpha),\quad f(\alpha)g(\alpha) = k(\alpha).$$

这些性质可简要地表示为

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha) \quad 和 \quad (fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha). \tag{2}$$

于是多项式之间的通过加、乘运算表示的关系在不定元用 D 中任一个元素代入后，仍保持成立.

如果 D 中的元素 α 使 $f(\alpha)=0$，则称 α 是多项式 $f(x)$ 的**零点**，或 $f(x)$ 的根.（有时也称 α 为方程 $f(x)=0$ 的根. 但我们应当注意，这里的方程是所谓的条件等式，并非指 $f(x)$ 为 $D[x]$ 中零元.）

$K=\mathbf{F}_p$ 的情形值得单独一提. 设 $f(x)=\bar{a}_n x^n+\cdots+\bar{a}_0\in\mathbf{F}_p[x]$，并记 $f^*(x)=a_n x^n+\cdots+a_0\in\mathbf{Z}[x]$，则 $\alpha=\bar{b}\in\mathbf{F}_p$ 是 $f(x)$ 的零点（即 $f(\alpha)=\bar{0}$），等价于说 $f^*(x)\equiv 0 \pmod p$ 有解 $x\equiv b \pmod p$. 因此 $\mathbf{F}_p[x]$ 中多项式的零点，与 §7 中说的（整系数多项式）模 p 的同余方程之解（本质上）是一回事.

下面的定理 1，称为因式定理，表现了多项式零点的主要作用：由零点推断（形式）多项式的性状.

定理 1　设 $f(x)\in D[x]$，且 $x=\alpha\in D$ 是 $f(x)$ 的零点，则 $f(x)$ 被 $x-\alpha$ 整除；反之亦然.

证明　以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，得到

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r,$$

这里 $q(x)\in D[x]$，而 $r\in D$ 是一个常数（参见 §15，定理 3 及其注记 2）. 以 $x=\alpha$ 代入上式，由 (2) 我们有 $r=f(\alpha)$，从而定理中的两个方面都得到了证明.

由定理 1 立即推出

定理 2　设 $f(x)\in D[x]$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in D$ 是 $f(x)$ 的不同的零点，则 $f(x)$ 被乘积 $(a-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)$ 整除.

证明　$k=1$ 时，这就是定理1；假设结论在 $k-1$ 时已成立，则有

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{k-1})g(x),$$

其中 $g(x)\in D[x]$. 以 $x=\alpha_k$ 代入上式，得

$$(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})\,g(\alpha_k)=0.$$

由于 $\alpha_k-\alpha_i\neq 0(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 且 D 中没有零因子(非零元的积不为零)，故必须 $g(\alpha_k)=0$. 由定理1知，$g(x)=(x-\alpha_k)h(x)$，这里 $h(x)\in D[x]$. 于是

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_k)h(x).$$

这就归纳证明了结论.

推论1　$D[x]$ 中 n 次多项式至多有 n 个(不同的)零点.

推论2　设 $D[x]$ 中多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 在 D 中至少有 $n+1$ 个(不同的)零点，则 $f(x)$ 是零多项式.

推论3　设 D 为无限集合(即 $D=\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)，$f(x)$，$g(x)\in D[x]$. 如果有无穷多个 $\alpha\in D$ 使 $f(\alpha)=g(\alpha)$，则 $f(x)=g(x)$(即 f 和 g 的同次幂的系数相等).

注记　1. 当 $D=\mathbf{F}_p$ 时，容易看到，推论1即是 §7 中的拉格朗日定理.

2. 当 D 为无限集合时，推论3表明，如 D 上的两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对所有 $\alpha\in D$ 满足 $f(\alpha)=g(\alpha)$，则 $f(x)=g(x)$. 因此，D 上的两个多项式作为(多项式)函数恒等，与它们作为(形式)多项式相等并无区别.

然而，在 D 为有限环 $\mathbf{F}_p$ 时，情况却很不相同. 例如，多项式 x^p-x 不是 $\mathbf{F}_p[x]$ 中零多项式，但对每个 $x\in\mathbf{F}_p$，它的值恒为零.

现在我们转向多项式的重根. 设 $f(x) \in D[x]$, $\alpha \in D$ 是 $f(x)$ 的一个零点. 如果 $f(x)$ 被 $(x-\alpha)^m$ 整除,但不能被 $(x-\alpha)^{m+1}$ 整除,则正整数 m 称为零点 α 的**重数**. 当 $m=1$ 时,我们称 α 是 $f(x)$ 的**单根**(或单零点);如 $m>1$ 则称 α 为 $f(x)$ 的(m 重)**重根**.

用多项式的**微商**容易确定其一个根是否为重根.

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \in D[x]$. 定义 $f(x)$ 的(形式的)微商 $f'(x)$ 为

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

因此 $f'(x)$ 也属于 $D[x]$. 类似于微积分中的结果,微商有如下的基本性质.

定理 3　设 $f(x), g(x) \in D[x]$, $a \in D$, 则

(i) $(f+g)'=f'+g'$;

(ii) 如 $a \in D$,则 $a'=0$,而 $(af)'=af'$;

(iii) $(fg)'=f'g+fg'$.

证明　(i),(ii)由定义易于证明. 为了证明(iii),我们注意,如 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 则由(i)知

$$\begin{aligned}(fg)' &= ((f_1+f_2)g)' = (f_1g+f_2g)' \\ &= (f_1g)'+(f_2g)';\end{aligned}$$

如 $g(x)$ 是两个多项式之和,有类似的结果. 因此,只需对特殊情形 $f(x)=ax^n$ 及 $g(x)=bx^m (a,b \in D)$ 证明(iii). 此时我们有

$$\begin{aligned}(fg)' &= (ax^n \cdot bx^m)' = (n+m)abx^{n+m-1} \\ &= nax^{n-1} \cdot bx^m + ax^n \cdot mbx^{m-1} \\ &= f'g+fg'.\end{aligned}$$

定理 4　设 $f(x) \in D[x]$,且 $\deg f \geqslant 1$, $\alpha \in D$ 是 $f(x)$ 的一个零点,则 α 是 $f(x)$ 的重零点的充分必要条件是 $f'(\alpha)=0$.

证明　设 α 是 $f(x)$ 的 m 重零点($m>1$)，即

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x),$$

这里 $g(x)\in D[x]$. 则

$$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x).$$

以 $x=\alpha$ 代入上式，得出 $f'(\alpha)=0$(注意 $m-1\geqslant 1$). 反过来，(由于 $f(\alpha)=0$) 我们设

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x),$$

其中 $g(\alpha)\neq 0$. 如果 $m=1$，则有

$$f'(x)=g(x)+(x-\alpha)g'(x),$$

于是 $f'(\alpha)=g(\alpha)\neq 0$，与假设矛盾. 从而必须 $m>1$.

习　题　17

1*. 设 $f(x)\in K[x]$，且 $\deg f=2$ 或 3. 则 $f(x)$ 在 K 上不可约的充分必要条件是 $f(x)$ 在 K 中无零点.

2. 确定 $\mathbf{F}_2[x]$ 与 $\mathbf{F}_3[x]$ 中所有 2 次及 3 次的首项系数为 1 的不可约多项式.

3. 设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，且 $f(0)\equiv f(1)\equiv 1 \pmod 2$. 证明：$f(x)$ 没有整数根.

4*. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbf{Z}[x]$，$n\geqslant 1$，$a_na_0\neq 0$ 且 $(a_n,\cdots,a_0)=1$. 设 $\frac{b}{c}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根，其中 $(b,c)=1$，则 $c\mid a_n$ 及 $b\mid a_0$. 特别地，首项系数为 ± 1 的整系数多项式的有理根必是整数.

5. 设 p 是素数，$f(x)\in\mathbf{Z}[x]$. 证明：$f(a)\equiv 0 \pmod p$ 对所有整数 a 成立的充分必要条件是

$$f(x)=(x^p-x)g(x)+ph(x),$$

其中 $g(x),h(x)\in\mathbf{Z}[x]$.

6*. 设 $f(x) \in D[x]$,证明

(i) 如 $D \neq \mathbf{F}_p$,则 $f'(x) = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 为常数;

(ii) 如 $D = \mathbf{F}_p$,则 $f'(x) = 0$ 的充分必要条件是 $f(x) \in \mathbf{F}_p[x^p]$,即 $f(x) = g(x^p)$,其中 $g(x) \in \mathbf{F}_p[x]$.

7. 对 $f(x) \in K[x]$, $f(x)$ 的 n 阶微商递推地定义为:$f^{(0)} = f$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$(对 $n \geqslant 1$). 证明:对 $f(x), g(x) \in K[x]$, 我们有

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

8. 设 $f(x) \in K[x]$,$\alpha \in K$,证明:α 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f^{(i)}(\alpha) = 0$(对 $0 \leqslant i \leqslant k-1$) 但 $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$. 这里 k 是正整数且在 $K = \mathbf{F}_p$ 时 $k < p$.

9*. 当 x 取整数时,复系数多项式 $f(x)$ 之值为整数,则称这样的多项式为**整值多项式**.

(i) 记 $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$($k$ 为正整数),则 $\binom{x}{k}$ 是 k 次整值多项式;

(ii) 证明:$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}$;

(iii) 任一个 n 次整值多项式可表示为

$$a_n\binom{x}{n} + a_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + a_1\binom{x}{1} + a_0,$$

其中 $a_n, \cdots, a_0$ 均为整数,$a_n \neq 0$;且对任何整数 $a_n, \cdots, a_0$,上述多项式均为整值多项式;

(iv) 若一个 n 次多项式,对于连续 $n+1$ 个整数均取整值,则此多项式必是整值多项式.

§ 18. 多项式的同余式

设 $f(x), g(x), m(x) \in K[x]$ 且 $m(x) \neq 0$,如果

$$m(x) \mid (f(x) - g(x)),$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **模 $m(x)$ 同余**，记作

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}. \tag{1}$$

(1) 式称为**模 $m(x)$ 的同余式**.

多项式的同余式与整数中的同余式有着类似的性质：

定理 1　设 $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$，则有

(i) (**返身性**)　$f(x) \equiv f(x) \pmod{m(x)}$；

(ii) (**对称性**)　如 $f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}$，则

$$g(x) \equiv f(x) \pmod{m(x)};$$

(iii) (**传递性**)　如果

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)},\ g(x) \equiv h(x) \pmod{m(x)},$$

则

$$f(x) \equiv h(x) \pmod{m(x)}.$$

定理 2　设 $f_i(x), g_i(x) \in K[x]$，且 $f_i(x) \equiv g_i(x) \pmod{m(x)}$ $(i = 1,2)$. 则

(i) $f(x) \pm f_2(x) \equiv g_1(x) \pm g_2(x) \pmod{m(x)}$；

(ii) $f_1(x)f_2(x) \equiv g_1(x)g_2(x) \pmod{m(x)}$.

定理 1 表明，“模 $m(x)$ 同余”是 $K[x]$ 中的一个等价关系. 由此，类似于将 $\mathbf{Z}$ 按“模 m 同余”分类，我们可以将 $K[x]$ 中多项式分类：同一个类中的多项式彼此模 $m(x)$ 同余，不同类中的多项式模 $m(x)$ 不同余，每一个类称为模 $m(x)$ 的一个同余类. 与整数中的情形不同的是，模 $m(x)$ 的同余类的类数不必是有限的(参考 §4).

由定理 2，我们也能像在 $\mathbf{Z}_m$ 中作加、减、乘法运算那样，在模 $m(x)$ 的同余类中定义加、减、乘法运算；并且易于知道，这些运算满足通常的运算规律(参考 §5). 进一步，如果 $m(x)$ 是 K 上不可约多项式，则模

$m(x)$ 的同余类中还可以作除法，从而形成一个域（与 $\mathbf{F}_p$ 类似），但这样的域一般不是有限域. 这是代数学中构作域的基本手法，限于本书的目的，我们不作讨论. 这里只给出（整数环中的）中国剩余定理对于域上多项式环的推广.

定理 3　设 $m_1(x),\cdots,m_k(x)$ 是 $K[x]$ 中两两互素的多项式，$b_1(x),\cdots,b_k(x)$ 是 $K[x]$ 中任意多项式，则存在多项式 $f(x)\in K[x]$，使得

$$f(x)\equiv b_1(x)\pmod{m_1(x)},\cdots,\ f(x)\equiv b_k(x)\pmod{m_k(x)};\tag{2}$$

所有这样的 $f(x)$ 形成模 $m_1(x)\cdots m_k(x)$ 的一个同余类. 特别地，在(2)的解中，有唯一的 $f(x)$，或为零或 $\deg f<\sum\limits_{i=1}^{k}\deg m_i$.

证明　记 $M(x)=m_1(x)\cdots m_k(x)$，并由 $M(x)=M_i(x)m_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 定义 $M_i(x)$. 则 $M_i(x)\in K[x]$，且 $(m_i(x),M_i(x))=1$ 及 $m_i(x)\mid M_j(x)$（对 $j\neq i$）. 由 §15，定理 5 的推论知，对于 $1\leqslant i\leqslant k$，存在 $h_i(x),l_i(x)\in K[x]$，使得

$$M_i(x)h_i(x)+m_i(x)l_i(x)=1.$$

记 $d_i(x)=M_i(x)h_i(x)$，则有

$$d_i(x)\equiv 1\pmod{m_i(x)},\ d_i(x)\equiv 0\pmod{m_j(x)}\ (j\neq i).\tag{3}$$

于是

$$f(x)=b_1(x)d_1(x)+\cdots+b_k(x)d_k(x).\tag{4}$$

满足(2)中 k 个同余式（参考 §7，定理 3 的证明）.

如果 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均满足定理中的要求，则 $f_1(x)-f_2(x)$ 被 $m_1(x),\cdots,m_k(x)$ 整除，从而被 $m_1(x)\cdots m_k(x)$ 整除（习题 15.8），即 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在模 $M(x)$ 的一个同余类中.

最后，如果(4)给出的 $f(x)$ 不为零且 $\deg f \geqslant \sum_{i=1}^{k} \deg m_i$. 由带余除法，存在唯一确定的 $q(x), r(x) \in K[x]$，使

$$r(x) = f(x) - M(x)q(x),$$

且 $r(x) = 0$ 或 $\deg r < \deg M \ (= \sum_{i=1}^{k} \deg m_i)$. 易知 $r(x)$ 满足(2).

由定理 3 能够推出下面的**拉格朗日插值公式**.

定理 4　设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 K 中 $n+1$ 个不同元素，$b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是 K 中任意元素，则存在唯一确定的多项式 $f(x) \in K[x]$，$f(x)$ 或为零或 $\deg f \leqslant n$，满足

$$f(a_i) = b_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

确切地说，$f(x)$ 由下式给出：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}. \tag{5}$$

证明　取 $m_i(x) = x - a_i (0 \leqslant i \leqslant n)$，则显然诸 $m_i(x)$ 是 $K[x]$ 中两两互素的多项式. 由定理 3，存在唯一确定的 $f(x) \in K[x]$，$f(x)$ 或为零或 $\deg f \leqslant n$，使得

$$f(x) \equiv b_i (\bmod\ x - a_i) \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

即

$$f(x) = b_i + (x - a_i)\, q_i(x) \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

其中 $q_i(x) \in K[x]$. 以 $x = a_i$ 代入上式，即得 $f(a_i) = b_i (0 \leqslant i \leqslant n)$.

为了构造符合要求的 $f(x)$. 我们注意，诸 $d_i(x)$ 满足(3)，现在等价于说 $d_i(a_i) = 1$ 及 $d_i(a_j) = 0 \ (j \neq i)$. 由于这里 $\deg d_i \leqslant n$，故应取(参考 §17，定理 2)

$$d_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

这可看作定理 4 的特殊情形的解 ($b_i = 1$,而 $b_j = 0$ 对 $j \neq i$),将这些解"叠加"(即作线性组合,参考(4)),即得出(5).

习　题　18

1. 提出并证明 $K[x]$ 中同余式的消去律.

2. 求次数不超过 3 的多项式 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$,使得

$$f(-1) = -1,\ f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 6.$$

3. 求出一个多项式 $f(x) \in \mathbf{F}_5[x]$,使得

$$f(\bar{0}) = f(\bar{1}) = f(\bar{4}) = \bar{1},$$

而 $f(\bar{2}) = f(\bar{3}) = \bar{3}$.

4. 设 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ 是一个 n 次多项式,满足

$$f(k) = \frac{1}{k}(k = 1,2,\cdots,n+1).$$

求 $f(n+2)$.

5. 设 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ 是一个 n 次多项式,满足

$$f(k) = 2^k(k = 1,2,\cdots,n+1).$$

求 $f(n+2)$.

6*. 设 φ 是 $\mathbf{F}_p$ 到自身的任一映射. 证明:存在 $f(x) \in \mathbf{F}_p[x]$,使得 $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ 对所有 $\alpha \in \mathbf{F}_p$ 成立.

7. 设 $f(x) \in \mathbf{F}_p[x]$, $\deg f = p - 2$. 若对所有 $\alpha \in \mathbf{F}_p(\alpha \neq 0)$ 有 $f(\alpha) = \alpha^{-1}$,试确定 $f(x)$.

8. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, $a_n \neq 0$,而 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是互不相同的整数,则 $f(x)$ 在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上所取的值中,至少有一个的绝对值 $\geqslant \frac{n!}{2^n}|a_n|$.

第七章　代数基本定理

§19. 代数基本定理

我们知道，$K[x]$ 中首项系数为 1 的不可约多项式有无穷多个. 本节我们将对 $K = \mathbf{C}$ 及 $\mathbf{R}$ 的情形确定 $K[x]$ 中所有不可约的多项式. 这一问题的回答依赖于下面的重要结果：

定理 1(代数基本定理)　$\mathbf{C}[x]$ 中任一非常数的多项式至少有一个复根.

代数基本定理的证明超出了本书的范围，我们不予讨论. 由定理 1 我们有

推论　(i) $\mathbf{C}[x]$ 中不约多项式都是一次多项式.

(ii) $\mathbf{C}[x]$ 中任一 n 次多项式 $f(x)(n \geqslant 1)$，在 $\mathbf{C}$ 上可唯一地分解为

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n), \tag{1}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数；从而 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(计入重根).

因此，设 $f(x)$ 互不相同的复根为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$，它们的重数分别为 $m_1,\cdots,m_l$(于是 $m_1 + \cdots + m_l = n$). 则 $f(x)$ 可唯一地分解为

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{m_1}\cdots(x - \alpha_l)^{m_l}.$$

这是复系数多项式的标准分解.

证明　(i) 设 $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ 是不可约多项式，$\deg p \geqslant 2$. 由定理 1

知 $p(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中有零点 α,即

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)(\S 17,\text{定理 } 1).$$

但 $\deg q = \deg p - 1 \geqslant 1$,这与 $p(x)$ 的不可约性矛盾.

(ii) 这是(i)及 $\mathbf{C}[x]$ 中唯一分解定理的推论(§16,定理 3).

注记　设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,将(恒等式)(1)的右端展开,我们得出

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{各根的和})\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};\\
&(\text{各根两两乘积之和})\ \alpha_1\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&(\text{各根之积})\ \alpha_1\cdots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

公式(2)就是著名的**韦达**(Viete)**定理**,它给出了方程的根与系数之间的关系.

设域 $K \subseteq \mathbf{C}$(即 K 为 $\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$),对 $f(x) \in K[x]$ 且非常数,代数基本定理断言其必有复根,却没有提供求根的实效方法.下面的结果使我们能够实际地确定 $f(x)$ 是否有重根,而不必求出根(参考 §15 中的欧氏算法).

定理 2　设 $K \subseteq \mathbf{C}$,$f(x) \in K[x]$ 且 $\deg f \geqslant 1$,则 $f(x)$ 的所有复根都是单根的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

证明　如果 $f(x)$ 有重根 α,则由 §17,定理 4 知,$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{C}[x]$ 中有公因式 $x - \alpha$,从而它们在 $K[x]$ 中不互素.

反过来,如果 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素,它们在 $\mathbf{C}[x]$ 中有一个公共的不可约因式,这必然是一次的.从而有一个多项式 $x - \alpha \in \mathbf{C}[x]$ 整除 $f(x)$ 与 $f'(x)$,再由 §17,定理 4 知,$f(x)$(在 $\mathbf{C}$ 中)有重根.

现在我们确定 $\mathbf{R}[x]$ 中所有不可约多项式.

定理3　设 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$ 是不可约多项式,则或者 $f(x)$ 是一次多项式,或者

$$f(x)=ax^2+bx+c,\quad 其中\ b^2-4ac<0.$$

证明　一次多项式当然是不可约的. 如果 $b^2-4ac<0$,则二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $\mathbf{C}$ 中有两个非实根,因此在 $\mathbf{R}$ 上不可约.

反过来,设 $f(x)$ 是一个不可约多项式且 $\deg f>1$,则 $f(x)$ 没有实根. 由代数基本定理,我们设 $\alpha=u+v\mathrm{i}$ 是 $f(x)$ 的一个非实根,其中 $u,v\in\mathbf{R}$ 且 $v\neq 0$. 令 $\bar{\alpha}=u-v\mathrm{i}$. 则

$$g(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-2ux+(u^2+v^2)$$

是二次实系数多项式. 由带余除法(§15,定理3),我们有

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),\tag{3}$$

这里 $q(x),r(x)\in\mathbf{R}[x]$,且 $r(x)=0$ 或 $\deg r\leqslant 1$. 将(3)看作 $\mathbf{C}$ 上的等式,并代入 $x=\alpha$,产生 $r(\alpha)=0$. 由于 $r(x)=cx+d$,其中 $c,d\in\mathbf{R}$. 于是有 $c\alpha+d=0$,但 α 非实数,故必须 $c=d=0$,进而 $r(x)=0$. 因此 $f(x)=g(x)q(x)$,这意味着 $q(x)$ 为(实)常数. 于是 $f(x)$ 是二次多项式,且没有实根,易知它必具有定理中说的形式.

由定理3及 $\mathbf{R}[x]$ 中多项式的唯一分解定理,我们有

推论　对任意 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$,$\deg f\geqslant 1$,$f(x)$ 有标准分解

$$\begin{aligned}f(x)=&a(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}\\&\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{n_l},\end{aligned}$$

其中 a 及诸 α_i,a_i,b_i 都是实数,$a_i^2-4b_i<0(1\leqslant i\leqslant l)$,且

$$m_1+\cdots+m_k+2n_1+\cdots+2n_l=\deg f.$$

我们看到 $\mathbf{C}[x]$ 及 $\mathbf{R}[x]$ 中不可约多项式具有相当简单的形式，其根本原因是每个(非常数的)复系数多项式在 $\mathbf{C}$ 中必有零点，以及每个复数可唯一地表示为 $a+bi$ 的形式($a,b\in\mathbf{R}$). 然而，关于 $\mathbf{F}_p[x]$ 及 $\mathbf{Q}[x]$ 中的不可约多项式，结果则完全不同. 事实上，在这些情况下问题要复杂和困难得多. 例如，能够证明，对每个正整数 n，$\mathbf{F}_p[x]$ 中都存在 n 次不可约多项式，并且可以给出这样的多项式的个数. 此外，在 §21 中将看到，$\mathbf{Q}[x]$ 中不可约多项式与 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约多项式本质上是一回事，而我们能给出一些充分条件判别 $\mathbf{Q}[x]$ 中一个多项式不可约. 例如，对每个 n，$\mathbf{Q}[x]$ 中都有 n 次不可约多项式.

另一方面，因为 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{C}$，由 $\mathbf{Q}[x]$ 中多项式在 $\mathbf{C}$ 中必有根这一事实，我们能够给出 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约多项式的某些基本性质.

定理 4　设 $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约多项式，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中没有重根.

证明　因 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，又 $f(x)\nmid f'(x)$ (因 $\deg f'<\deg f$). 因此 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 必然互素，由定理 2 即知 $f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中没有重根.

定理 5　设 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$ 且 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 如果 $g(x)\in\mathbf{Q}[x]$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中有公共根，则必然 $f(x)\mid g(x)$.

证明　如果 $f(x)\nmid g(x)$，因 $f(x)$ 不可约，故 $(f(x),g(x))=1$. 于是(由 §15，定理 5 的推论)存在 $u(x),v(x)\in\mathbf{Q}[x]$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

这一等式在 $\mathbf{C}$ 上仍然成立. 以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共复根代入，得出 $1=0$，矛盾！因此必然 $f(x)\mid g(x)$.

我们也可采用下面的论证：因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中有公共根，故它

们在 $\mathbf{C}$ 上不互素；从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上也不互素（参考 §15，定理 6 的注记 3）. 因此现在必有 $f(x)|g(x)$.

定理 5 表明，$\mathbf{Q}$ 上不可约多项式的根必然是成族出现的：若 $\mathbf{Q}[x]$ 中一个多项式包含了其一个根，则必然包含其所有根.

习　题　19

1*. 设 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$，$\deg f\geqslant 1$. 设 α 是 $f(x)$ 的一个复根，则 α 的共轭 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根.

2. 设 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$，如果对任意实数 x 有 $f(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 是两个实系数多项式的平方和.

3*. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{C}[x]$，$a_n\neq 0$，$\alpha$ 是 $f(x)$ 任一根，则

$$|\alpha|\leqslant 1+\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|.$$

4. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{Z}[x]$，其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9$ $(0\leqslant i\leqslant n)$，且 $a_n\neq 0$. 如 α 是 $f(x)$ 的一个复根，则 $\mathrm{Re}(\alpha)\leqslant 0$ 或者 $|\alpha|<4$.

§20. 单　位　根

一个复数 ζ 称为（复）**单位根**，如果对某个正整数 n，它满足方程

$$x^n-1=0. \tag{1}$$

方程(1)的 n 个根，记为 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$，称为 ***n* 次单位根**. 由 §17，定理 4 知，这些根互不相同. 因为，如记 $f(x)=x^n-1$，则 $f'(x)=nx^{n-1}$，从而

$$f'(\zeta_k)=n\zeta_k^{n-1}\neq 0(1\leqslant k\leqslant n).$$

今后我们用 μ_n 记 n 次单位根的集合.

我们熟知，由棣莫弗(De Moivre)公式可导出

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1,\cdots,n. \tag{2}$$

由此立即看出，在复平面上，μ_n 中的 n 个复数(对应的点)恰好将单位圆周 $|z| = 1$ 分成 n 等份，其中一个分点为 $z = 1$.

设 ζ 是一个单位根. 我们将满足 $\zeta^d = 1$ 的最小正整数 d 称为 ζ 的**阶**. 例如，1 的阶是 1，而 -1 的阶是 2(当且仅当 n 为偶数时，$-1 \in \mu_n$).

如果 $\zeta \in \mu_n$ 且 ζ 的阶恰为 n，则称 ζ 是**本原的 n 次单位根**. 本原的 n 次单位根 与(整数中)模 m 的原根(阶为 $\varphi(m)$)有许多类似之处. 读者可以对照地看 §8 与这里的结果及论证.

引理 1　设 ζ 是一个单位根，其阶是 d. 如 m 是一个整数，则 $\zeta^m = 1$ 的充分必要条件是 $d \mid m$. 特别地，μ_n 中任一元素的阶均整除 n.

证明　与 §8，引理 1 的证明类似.

引理 2　设 ζ 是一个单位根，其阶为 d. 如 k 是一个整数，则 ζ^k 是一个阶为 $\frac{d}{(d,k)}$ 的单位根. 特别地，ζ^k 的阶为 d 的充分必要条件是 $(k,d) = 1$.

证明　与 §8，引理 3 的证明类似.

现在我们证明，本原的 n 次单位根“生成”μ_n 中所有单位根.

定理 1　如 ζ 是一个本原的 n 次单位根，则 μ_n 中所有单位根可表示成

$$\zeta^0 = 1, \zeta, \cdots, \zeta^{n-1}; \tag{3}$$

反过来，如果 ζ 是一个 n 次单位根，使 μ_n 中所有单位根可表示为(3)的形式，则 ζ 是本原的.

证明　设ζ是一个本原的n次单位根. 显然,(3) 给出的n个数都满足方程(1),从而均属于μ_n. 因此我们只需证明它们互不相同. 假设

$$\zeta^i = \zeta^j,$$

其中$0 \leqslant i < j \leqslant n-1$,则$\zeta^{j-i} = 1$. 因$\zeta$的阶是$n$,故由引理 1 知$n \mid (j-i)$; 这不可能,因为$0 < j-i < n$.

反过来,设$\zeta \in \mu_n$,并使μ_n中所有单位根可表示为(3) 的形式. 设ζ的阶为d, 如果ζ不是本原的,即$d < n$,则ζ的任一幂次都是d次单位根. 特别地,(3) 中的n个数都是属于μ_d,即$\mu_n \subset \mu_d$. 这显然不可能,因μ_n中有n个不同的元素,而μ_d仅有d个元素.

注记　容易验证,μ_n中n个数对(复数的)乘法形成群. 定理 1 表明μ_n是一个循环群,且生成元是本原的n次单位根. (参考 §5 与 §8.)

我们现在确定μ_n中所有的本原单位根.

定理 2　μ_n中共有$\varphi(n)$个n次本原单位根. 确切地说,设

$$\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n},$$

则全体本原的n次单位根为

$$\{\zeta^k \mid 1 \leqslant k \leqslant n, \quad (k,n) = 1\}. \tag{4}$$

证明　由棣莫弗公式及(2) 可见,μ_n中所有n次单位根ζ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$可表示为

$$\zeta^0, \zeta^1, \cdots, \zeta^{n-1}.$$

故由定理 1 知,ζ是μ_n中的一个本原的n次单位根. 再由定理 1 及引理 2 推出,$\varphi(n)$个数$\zeta^k (1 \leqslant k \leqslant n, (k,n) = 1)$是$\mu_n$中全部的本原的$n$次单位根.

推论　设 $n>1$，对每个正整数 d，$d|n$，在 μ_n 中恰有 $\varphi(d)$ 个阶为 d 的元素. 确切地说，如 ζ 是一个本原 n 次单位根，则 μ_n 中阶为 d 的元素为

$$S_d=\{\zeta^{\frac{n}{d}k}\mid 1\leqslant k\leqslant d,(k,d)=1\},\tag{5}$$

证明　与 §8，定理 4 的证明类似.

注记　对 $d|n$，设 S_d 如(5)所述. 则诸 S_d 显然形成 μ_n 的一个划分，而 μ_n 有 n 个元素，由上面的推论我们顺便导出了

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n.\tag{6}$$

(参考 §8，定理 1 的证明.)

习　题　20

1. 设 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$，n 是正整数，如果 $(x-1)|f(x^n)$，则 $(x^n-1)|f(x^n)$.

2. 设 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ 且 $\deg f\geqslant 1$，n 是正整数. 如果 $f(x)|f(x^n)$，则 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

3*. 设 m,n 为整数且 $n>1$. 证明

$$\frac{1}{m}\sum_{x=1}^{m}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,nx/m}=\begin{cases}0, & \text{如果 } m\nmid n;\\ 1, & \text{如果 } m|n.\end{cases}$$

4*. 证明：同余方程 $f(x)\equiv 0\pmod m$ 的解数为

$$N=\frac{1}{m}\sum_{y=1}^{m}\sum_{x=1}^{m}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,f(x)y/m}.$$

由此推出同余方程 $ax\equiv b\pmod m$ 的解数是 (a,m)(如果 $(a,m)|b$) 或 0(如果 $(a,m)\nmid b$).

5*. 设 n 是整数且 $n>2$.

(i) 求所有 n 次单位根的和与积；

(ii) 求所有本原的 n 次单位根的和与积.

第八章　整系数多项式

§21.　本原多项式与唯一分解

本章研究整系数多项式环 $\mathbf{Z}[x]$.

$\mathbf{Z}[x]$ 中的整除及不可约的概念与 $K[x]$ 中的类似. 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$, 如存在 $h(x) \in \mathbf{Z}[x]$,使 $f(x) = g(x)h(x)$,则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$;否则,便称 $g(x)$ **不整除** $f(x)$. 如 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$,$\deg f \geqslant 1$,而 $f(x)$ 仅有平凡的分解,即不能分解为两个低次但非常数的(整系数)多项式之积,则称 $f(x)$ 为 **$\mathbf{Z}$ 上的不可约多项式**,否则称 $f(x)$(在 $\mathbf{Z}$ 上)可约(或可分解).

设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbf{Z}[x]$ 且 $f(x) \neq 0$,我们将 $a_0, \cdots, a_n$ 的最大公约数 $(a_0, \cdots, a_n)$ 称为 $f(x)$ 的**容度**;容度为 1 的多项式称为($\mathbf{Z}$ 上的)**本原多项式**. 显然,$\mathbf{Z}[x]$ 中任一非零多项式可分解为其容度与一个本原多项式的乘积. 我们将证明,$\mathbf{Z}[x]$ 中唯一分解定理也成立,确切地说,我们有

定理 1　$\mathbf{Z}[x]$ 中任一非常数的多项式可分解为一个整数与有限个(首项系数为正的)本原不可约多项式的乘积;并且,如不计(乘积中)因式的次序,这些不可约多项式是唯一决定的.

为了证明定理 1,需作一些准备工作. 我们首先证明下面重要的结果.

引理 1(高斯引理)　$\mathbf{Z}[x]$ 中两个本原多项式的乘积仍是一个本

原多项式.

证明　设有两个本原多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

及

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

使得 $f(x)g(x)$ 不是本原的. 则有素数 p 整除 $f(x)g(x)$ 中所有系数. 因 $f(x)$ 是本原的，故 p 不能整除所有 a_i. 设 r 是最小下标使 a_r 不被 p 整除；类似地，设 s 是最小的下标使 b_s 不被 p 整除.

$f(x)g(x)$ 中 x^{r+s} 的系数为

$$\begin{aligned} & a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + a_{r+2} b_{s-2} + \cdots \\ & \quad + a_{r-1} b_{s+1} + a_{r-2} b_{s+2} + \cdots, \end{aligned}$$

这个和应该被 p 整除. 另一方面，由于对 $i \leqslant r-1, j \leqslant s-1$ 有 $p \mid a_i$ 及 $p \mid b_j$，故和中除第一项外，其余项都能被 p 整除，因此 $p \mid a_r b_s$. 因 p 是素数，故 $p \mid a_r$ 或 $p \mid b_s$，这与我们对 a_r, b_s 的选取相违.

注记　上述论证的最后一步应用了 §3，定理 2. 因此，高斯引理（本质上）依赖于 $\mathbf{Z}$ 上的唯一分解定理（参考 §3，定理 3 的注记 2）.

下面的引理表明，$\mathbf{Q}[x]$ 中每一个非零多项式，都本质上唯一地对应 $\mathbf{Z}[x]$ 中的一个本原多项式.

引理 2　设 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ 且 $f(x) \neq 0$. 则存在一个有理数 $a \neq 0$，使得 $af(x)$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中的本原多项式. 此外，如果有理数 $b \neq 0$，使 $bf(x)$ 也是 $\mathbf{Z}[x]$ 中的本原多项式，则 $a = \pm b$.

证明　设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,$$

这里 $a_0,\cdots,a_n$ 均是有理数且 $a_n \neq 0$. 取整数 e 使 $ea_0,\cdots,ea_n$ 都是整数，并令 $d = (ea_0,\cdots,ea_n)$. 则

$$\frac{e}{d}f(x) = \frac{ea_n}{d}x^n + \cdots + \frac{ea_0}{d}$$

是 $\mathbf{Z}[x]$ 中本原多项式.

此外，如果有理数 $a,b(ab \neq 0)$，使 $af(x)$ 和 $bf(x)$ 都是本原多项式. 设

$$af(x) = g(x), \quad bf(x) = h(x),$$

则有 $g(x) = \frac{b}{a}h(x)$. 因 $g(x),h(x)$ 均是本原的，故 $\frac{b}{a}$ 必须是整数，并且没有素因子，从而 $\frac{b}{a} = \pm 1$ 即 $a = \pm b$.

设 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 且非常数. 如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上有非平凡的分解，那么 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上当然也有非平凡的分解(因 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$). 由引理 1 和引理 2，我们能够证明反过来的结论也成立.

定理 2　设 $f(x)$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中一个本原多项式，且 $\deg f \geqslant 1$. 如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上有非平凡的分解. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上也有非平凡的分解. 更确切地说，设 $f(x) = g(x)h(x)$，这里 $g(x),h(x) \in \mathbf{Q}[x]$ 且 $\deg g$，$\deg h \geqslant 1$. 则存在有理数 a 使

$$f(x) = ag(x) \cdot \frac{1}{a}h(x), \quad 且\ ag(x),\frac{1}{a}h(x) \in \mathbf{Z}[x].$$

证明　由引理 2 知，存在非零有理数 a,b 使 $ag(x)$ 和 $bh(x)$ 都是本原多项式. 记 $g_1(x) = ag(x)$，$h_1(x) = bh(x)$. 则由 $f(x) = g(x)h(x)$ 产生

$$abf(x) = g_1(x)h_1(x).$$

由引理 1，$g_1(x)h_1(x)$ 是本原多项式，而(按假设)$f(x)$ 也是本原多项式，故 ab 必须是整数且没有素因子，所以 $ab = \pm 1$. 因此，上述的有理

数 a 使 $ag(x)$ 与 $\frac{1}{a}h(x)$ 都是(本原的)整系数多项式,由此得出我们的断言.

现在我们容易证明本节的主要结果.

定理 1 的证明　任一个非常数的整系数多项式 $f(x)$ 可(唯一地)分解为其(正、负)容度与一个首项系数为正的本原多项式的积. 故我们只要对 $f(x)$ 为(首项系数是正的)本原多项式的情形证明结论.

(定理 1 中)所说的分解的存在性是显然的(注意,本原多项式的非常数的因式必是本原多项式).

为了证明分解的唯一性,设 $f(x)$ 有两种分解:

$$f(x) = p_1(x)\cdots p_k(x) = q_1(x)\cdots q_l(x),$$

其中 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 都是首项系数为正的本原不可约多项式. 定理 2 表明,$\mathbf{Z}[x]$ 中一个本原不可约多项式在 $\mathbf{Q}[x]$ 中仍是不可约的,而 $\mathbf{Q}[x]$ 具有唯一分解性(参考 §16,定理 3),因此,将 $f(x)$(在 $\mathbf{Z}$ 上的)上述两种分解放到 $\mathbf{Q}$ 上看,我们便推出 $k = l$,以及对适当的有理数 a_i,使得 $a_1p_1(x),\cdots,a_kp_k(x)$ 是 $q_1(x),\cdots,q_k(x)$ 的一个排列. 无妨设

$$a_ip_i(x) = q_i(x)(1 \leqslant i \leqslant k).$$

由于 $p_i(x)$ 和 $q_i(x)$ 均是首项系数为正的本原多项式,故必须 $a_i = 1(1 \leqslant i \leqslant k)$,即

$$p_i(x) = q_i(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

证毕.

注记　系数属于(整数)环的多项式与域上的多项式很不相同. 我们已经看到,$K[x]$ 与 $\mathbf{Z}$ 的唯一分解性能够类似地论证的原因,在于两者都是所谓的主理想整环(参考 §16,定理 3 后面的注记). 然而,容易得知,$\mathbf{Z}[x]$ 不是主理想整环(习题 21.4). 因此,我们不能采用 §16 的论证来证明 $\mathbf{Z}[x]$ 的唯一分解性.

定理 1 的上述证明基于两个事实. 其一是 $\mathbf{Z}$ 的唯一分解性(参考引理 1 的注记);其二是每个有理数均可表示为两个整数之商(即所谓 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的商域),而 $\mathbf{Q}[x]$ 是唯一分解环.

习　题　21

1*. 对 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 且 $f(x) \neq 0$,用 $c(f)$ 表示 $f(x)$ 的容度.

(i) 对任意 $a \in \mathbf{Z}, a \neq 0$,证明:$c(af) = |a|c(f)$;

(ii) 证明:$c(fg) = c(f) \cdot c(g)$.

2*. 设 $f(x)$ 是本原多项式,$g(x) \in \mathbf{Q}[x]$,且 $f(x)g(x) \in \mathbf{Z}[x]$,则 $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

3. 设 $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 是本原的不可约多项式,证明:对 $f(x)$, $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$,若 $p(x) | f(x)g(x)$,则 $p(x) | f(x)$ 或 $p(x) | g(x)$.

4. 设 J 是由常数项为偶数的所有整系数多项式构成的集合.

(i) 证明:J 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中的一个理想,即对任意 $f(x), g(x) \in J$,有 $f(x) - g(x) \in J$,并且对任意 $f(x) \in J$ 及 $r(x) \in \mathbf{Z}[x]$,有 $f(x)r(x) \in J$;

(ii) 证明:J 不是 $\mathbf{Z}[x]$ 的主理想,即不存在 $d(x) \in \mathbf{Z}[x]$,使

$$J = (d(x)) = \{d(x)r(x) | r(x) \in \mathbf{Z}[x]\}.$$

§22.　不可约多项式

在 §19 中我们确定了 $\mathbf{C}[x]$ 及 $\mathbf{R}[x]$ 中的所有不可约多项式. 判定 $\mathbf{Q}[x]$ 中的多项式是否(在 $\mathbf{Q}$ 上)不可约,(按 §21,定理 2)等价于判别一个整系数多项式是否在 $\mathbf{Z}$ 上不可约,这一(在代数和数论中)重要的问题相当困难和复杂,我们这里仅提及几个较为基本的原则和手法.

最为经典和著名的判别法是下面的

定理 1(艾森斯坦(Eisenstein)判别法)　设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

是一个整系数多项式,其中 $n \geqslant 1$. 设存在一个素数 p,使得 $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$(对 $i < n$) 但 $p^2 \nmid a_0$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约(从而在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约).

证明　我们讲述两种证明. 第一个证明是 §21,引理 1 中论证的变形. 假设有两个(非常数)整系数多项式

$$g(x) = b_k x^k + \cdots + b_0 \quad 及 \quad h(x) = c_l x^l + \cdots + c_0$$

使 $f(x) = g(x)h(x)$. 因 $a_0 = b_0 c_0$ 被 p 整除但不被 p^2 整除,故 b_0 与 c_0 中恰有一个被 p 整除,无妨设 $p \mid c_0$,又 $a_n = b_k c_l$ 不被 p 整除,故 $p \nmid c_l$. 现在我们可取最小的下标 r 使 $p \nmid c_r$. 显然 $r \neq 0$, 并且

$$a_r = b_0 c_r + b_1 c_{r-1} + \cdots + b_r c_0.$$

因为 $p \nmid b_0 c_r$,而和式中其余项都被 p 整除, 故 $p \nmid a_r$,这与定理中条件矛盾.

由定理 1 推出,对任意正整数 $n \geqslant 1$,多项式 $x^n + 2$ 在 $\mathbf{Z}$ 上均不可约. 因此 $\mathbf{Q}[x]$ 中存在任意次数的不可约多项式.

判断 $\mathbf{Z}[x]$ 中多项式是否不可约的一个基本手法是所谓(整系数多项式) 的模 p 约化(可比较 §12). 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x].$$

将 $f(x)$ 的系数换为它们所属的模 p 的同余类,这唯一确定了 $\mathbf{F}_p[x]$ 中的一个多项式,记作 $\overline{f}(x)$. 即

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_n x^n + \cdots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0 \in \mathbf{F}_p[x].$$

我们将 $\overline{f}(x)$ 称为 $f(x)$ 的**模 p 约化多项式**. 显然, 如果 $p \nmid a_n$, 则 $\deg f = \deg \overline{f}$. 又不难看出,模 p 的约化保持 $\mathbf{Z}[x]$ 中多项式的加法和

乘法，这可简单地表示为

$$\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g},\quad \overline{fg}=\overline{f}\cdot\overline{g}.$$

定理 2　设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ 且非常数，p 是一个素数，不整除 $f(x)$ 首项系数. 如果 $f(x)$ 模 p 约化多项式 $\overline{f}(x)$ 是 $\mathbf{F}_p[x]$ 中不可约多项式，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约.

证明　假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上有非平凡的分解 $f(x)=g(x)h(x)$. 模 p 约化，产生

$$\overline{f}(x)=\overline{g}(x)\overline{h}(x).$$

因现在 $\deg f=\deg\overline{f}$，故 $\overline{g}(x)$ 与 $\overline{h}(x)$ 不是 $\mathbf{F}_p[x]$ 中常数. 从而上式给出 $\overline{f}(x)$ 在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中一个非平凡的分解，与假设矛盾.

例如，考虑 $f(x)=x^3+2x+1$，我们不能应用定理 1. 然而 $f(x)$ 模 3 的约化为 $\overline{f}(x)=x^3+\overline{2}x+\overline{1}$，易知它在 $\mathbf{F}_3[x]$ 中不可约（习题 17.1），从而由定理 2 知 $f(x)$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约多项式.

即使 $\overline{f}(x)$ 在 $\mathbf{F}_p$ 上是可约的，因 $\mathbf{F}_p[x]$ 中唯一分解定理成立，有时仍能从 $\overline{f}(x)$ 的分解导出 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的不可约性. 我们用这一手法给出定理 1 的另一种证明：

假设有 $f(x)$ 满足定理 1 的条件，但在 $\mathbf{Z}[x]$ 中有非平凡的分解 $f(x)=g(x)h(x)$. 模 p 约化得出

$$\overline{g}(x)\overline{h}(x)=\overline{a}_nx^n.$$

上式右端是（$\mathbf{F}_p[x]$ 中）非零常数与不可约多项式的 n 次幂之积，而 $\mathbf{F}_p[x]$ 具有唯一分解性，故 $\overline{g}(x)$ 与 $\overline{h}(x)$ 均是 $\mathbf{F}_p$ 中常数与 x 的正次幂的积，从而 $\overline{g}(x)$ 与 $\overline{h}(x)$ 的常数项都是 $\overline{0}$. 因此（回到 $\mathbf{Z}$ 看），$f(x)$ 的常数项被 p^2 整除. 矛盾！

另一方面，$f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约，并非意味着一定存在一个素数 p，使其模 p 约化在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中不可约（试比较 §12，例 1）.

例 1　设 $f(x)=x^4+1$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约；但对每个素数 p，$f(x)$ 模 p 的约化多项式 $\overline{f}(x)$ 在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中可约.

证明　$f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约甚为容易，我们将这留给读者证明.

下面证明，对每个素数 p，$\overline{f}(x)$ 在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中可约. 如 $p=2$，则

$$\overline{f}(x)=(x+\overline{1})^4.$$

当 $p>2$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{f}(x)&=(x^2)^2-(\overline{-1})=(x^2+\overline{1})^2-\overline{2}x^2\\&=(x^2-\overline{1})^2-(\overline{-2})x^2.\end{aligned}\tag{1}$$

由于

$$\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-2}{p}\right)=\left(\frac{4}{p}\right)=1,$$

故

$$\left(\frac{-1}{p}\right),\left(\frac{2}{p}\right)\text{与}\left(\frac{-2}{p}\right)$$

中必有一个为 1，从而 $\overline{-1}$，$\overline{2}$ 与 $\overline{-2}$ 中必有一个是 $\mathbf{F}_p$ 中元素的平方，由(1) 即产生 $\overline{f}(x)$ 在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中一个非平凡的分解.

由代数基本定理，$\mathbf{Z}[x]$ 中 $n(>1)$ 次多项式在 $\mathbf{C}$ 中必有 n 个根. 通过整系数多项式在 $\mathbf{C}$ 上分解的信息也能帮助判断其不可约性，这一手法与上面说的模 p 约化几乎“相反”，我们用一个例子说明其基本精神.

例 2　设 p 是一个素数，整数 $n>1$. 设

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+p\in\mathbf{Z}[x],$$

且 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|<p$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约.

证明　论证的出发点是 $f(x)$ 的复根之模均大于 1. 事实上，设 x_0 是 $f(x)$ 的一个根，而 $|x_0| \leqslant 1$，则

$$p = |a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0| \leqslant |a_n||x_0|^n + \cdots + |a_1||x_0|$$
$$\leqslant |a_n| + \cdots + |a_1|,$$

与假设矛盾. 现在设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上有非平凡的分解 $f(x) = g(x)h(x)$. 则

$$p = |f(0)| = |g(0)| \cdot |h(0)|. \tag{2}$$

($g(0)$，$h(0)$ 实际上分别是 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的常数项，从而均是整数). 设 b 是 $g(x)$ 的首项系数，则由韦达定理知，$\frac{g(0)}{b}$ 等于 $g(x)$ 的所有根之积. 但 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，从而它们的模都大于 1. 因此，$\left|\frac{g(0)}{b}\right| > 1$，故更有 $|g(0)| > 1$；同理 $|h(0)| > 1$. 所以(2)不能成立，因 p 是素数.

习　题　22

1. 证明下面的多项式在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约：

(i) $x^4 + 3x + 5$；

(ii) $x^6 - 4x^3 + 6$；

(iii) $x^4 + 1$；

(iv) $3x^5 + 2x^4 - x^2 + 4x + 5$；

(v) $x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 5$.

2*. (i) 设 p 是素数，证明：$x^{p-1} + \cdots + x + 1$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约；

(ii) 设 $n > 1$ 是整数，证明：如 $x^{n-1} + \cdots + x + 1$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约，则 n 是素数.

3. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是互不相同的整数，证明：$(x - a_1)\cdots(x - a_n) - 1$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

4. 设 $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_0$ 是十进制表示的素数，

则多项式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

5. 设 p 是素数. 证明:$\mathbf{F}_p[x]$ 中形如 $x^2 + \alpha x + \beta$ 的二次多项式中,共有 $\frac{p(p-1)}{2}$ 个不可约多项式.

6. 用模 p 约化的手法证明高斯引理(§21,引理 1)

§23. 分圆多项式

设 n 是正整数,以所有本原的 n 次单位根为根的多项式

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} (x - \zeta^k), \quad \zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$$

称为 **n 级分圆多项式**,其次数是 $\varphi(n)$ 且首项系数为 1. 很明显,$\Phi_n(x)$ 不依赖于本原的 n 次单位根 ζ 的选取(参考 §20).

定理 1　我们有

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

证明　记 μ_n 为 n 次单位根之集. 对每个 $d|n$,设 S_d 是 μ_n 中阶为 d 的元素之集,由 §20,定理 2 的推论知,S_d 恰是 $\varphi(d)$ 个本原的 d 次单位根,故有(参见 §20 中(6)的证明)

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= \prod_{\alpha \in \mu_n} (x - \alpha) = \prod_{d|n} \prod_{\alpha \in S_d} (x - \alpha) \\ &= \prod_{d|n} \Phi_d(x). \end{aligned}$$

定理 2　$\Phi_n(x)$ 是整系数多项式.

证明　用归纳法，当 $n=1$ 时，$\Phi_1(x)=x-1\in\mathbf{Z}[x]$. 假设对所有正整数 $d<n$，均有 $\Phi_d(x)\in\mathbf{Z}[x]$. 令

$$g(x)=\prod_{\substack{d\mid n\\ d\neq n}}\Phi_d(x),$$

则 $g(x)\in\mathbf{Z}[x]$. 由定理 1，

$$x^n-1=g(x)\Phi_n(x). \tag{1}$$

由于 $g(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式，由带余除法知，存在唯一确定的 $q(x),r(x)\in\mathbf{Z}[x]$ 使

$$x^n-1=g(x)q(x)+r(x), \tag{2}$$

其中 $r(x)$ 或者为零，或者 $\deg r<\deg g$. 现在将(2) 看作是 $\mathbf{C}[x]$ 中带余除法，与(1) 比较，由 §15，定理 3 中的唯一性便推出 $r(x)=0$ 及 $q(x)=\Phi_n(x)$(参考 §15，定理 3 的注记 2)，从而 $\Phi_n(x)\in\mathbf{Z}[x]$.

现在我们证明本节的主要结果：

定理 3　$\Phi_n(x)$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约多项式(从而在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约).

由于 $\Phi_n(x)\in\mathbf{Z}[x]$ 且首项系数为 1，故其在 $\mathbf{Z}$ 上的任一不可约因式 $f(x)$ 的首项系数也是 1. 我们将证明 $f(x)$ 以所有本原的 n 次单位根为根，从而必须有 $f(x)=\Phi_n(x)$，即 $\Phi_n(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约. 论证的关键是下面的

引理　设 $f(x)$ 是 $\Phi_n(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的一个首项系数为 1 的不可约因式，p 是素数且 $p\nmid n$. 令 $\omega\in\mathbf{C}$ 是 $f(x)$ 的一个根，则 ω^p 也是 $f(x)$ 的一个根.

如果引理已证明，则不难推出定理 3. 设 ζ 是 $f(x)$ 的一个根，则 ζ 也是 $\Phi_n(x)$ 的根，故 ζ 是一个本原的 n 次单位根. 对任意整数 k，$2\leqslant k\leqslant n$ 且 $(k,n)=1$，将 k 分解为(不必互不相同的)素数的积：

$$k = p_1 \cdots p_s,$$

反复使用引理，我们由 $f(\zeta)=0$ 推出 $f(\zeta^{p_1})=0$，从而 $f(\zeta^{p_1 p_2})=0,\cdots$. 最后，$f(\zeta^{p_1\cdots p_s})=0$，即 $f(\zeta^k)=0$. 由于 $\zeta^k(1\leqslant k\leqslant n,(k,n)=1)$ 恰给出所有本原的 n 次单位根（见 §20，定理 2），因此 $f(x)$ 以所有本原的 n 次单位根为根. 从而我们的断言得证.

现在我们证明引理，由假设，存在一个首项系数为 1 的多项式 $g(x)\in \mathbf{Z}[x]$，使得

$$x^n - 1 = f(x)g(x). \tag{3}$$

因 $f(\omega)=0$，故 $\omega^n=1$，更有 $(\omega^p)^n=1$，即 ω^p 是 x^n-1 的根. 如果 $f(\omega^p)\neq 0$，则由(3) 推出 $g(\omega^p)=0$，这意味着 ω 是多项式 $f(x)$ 与 $g(x^p)$ 的公共根. 由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，故由 §19，定理 5 推出，$f(x)$（在 $\mathbf{Q}$ 上）整除 $g(x^p)$，即有 $h(x)\in \mathbf{Q}[x]$ 使得

$$g(x^p) = f(x)h(x). \tag{4}$$

因 $f(x)$ 的首项系数为 1，当然是本原多项式，由此及高斯引理知 $h(x)$ 实际上是整系数多项式（见习题 21.2）.

现在我们进入多项式环 $\mathbf{F}_p[x]$. 设 $\overline{f}(x),\overline{g}(x),\overline{h}(x)$ 分别是 $f(x)$，$g(x)$ 及 $h(x)$ 模 p 的约化多项式. 则由(3)，(4) 我们（在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中）有

$$x^n - \overline{1} = \overline{f}(x)\cdot\overline{g}(x) \tag{5}$$

和

$$\overline{g}(x^p) = \overline{f}(x)\cdot\overline{h}(x). \tag{6}$$

由于对任意 $\alpha\in\mathbf{F}_p$ 有 $\alpha^p=\alpha$（习题 6.7），因此，如果设

$$\overline{g}(x) = x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

则 $\overline{g}(x) = x^k + \alpha_{k-1}^p x^{k-1} + \cdots + \alpha_1^p x + \alpha_0^p$. 因此

$$\begin{aligned}\overline{g}(x^p) &= x^{pk} + \alpha_{k-1}^p x^{p(k-1)} + \cdots + \alpha_1^p x^p + \alpha_0^p \\ &= (x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)^p \\ &= \overline{g}^{\,p}(x).\end{aligned}$$

现在等式(6)可改写为

$$\overline{g}^{p}(x)=\overline{f}(x)\cdot\overline{h}(x).$$

因 $\mathbf{F}_p[x]$ 具有唯一分解性，故 $\overline{f}(x)$（在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中）任一不可约因式必整除 $\overline{g}(x)$，从而 $\overline{f}(x)$ 与 $\overline{g}(x)$ 不互素，任取它们的一个非常数公因式 $\lambda(x)$. 由等式(5)知，$\lambda^2(x)$ 整除 $x^n-\overline{1}$. 令

$$x^n-\overline{1}=\lambda^2(x)\cdot A(x),$$

其中 $A(x)\in\mathbf{F}_p[x]$. 上式两边求微商，产生

$$nx^{n-1}=\lambda(x)(2\lambda'(x)\cdot A(x)+A(x)\lambda'(x)),$$

由此知 $\lambda(x)\mid nx^{n-1}$. 但 $\lambda(x)$ 是 $x^n-\overline{1}$ 的因式，因此，nx^{n-1} 与 $x^n-\overline{1}$（在 $\mathbf{F}_p[x]$ 中）有非常数公因式. 这显然导出矛盾：因为 $p\nmid n$，故 $nx^{n-1}\neq\overline{0}$，从而 nx^{n-1} 与 $x^n-\overline{1}$ 事实上是互素的. 引理证毕.

习　题　23

1*. 证明分圆多项式的下述性质：

(i) 如 n 是奇整数，且 $n>1$，则

$$\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x);$$

(ii) 如正整数 r 的素因子均整除 n，则

$$\Phi_n(x^r)=\Phi_{nr}(x);$$

(iii) 如 p 是素数，$p\nmid n$；s 为正整数，则

$$\Phi_n(x^{ps})=\Phi_n(x^s)\Phi_{pn}(x^s);$$

(iv) 如 n 的不同素因子为 $p_1,\cdots,p_k$，则

$$\Phi_n(x)=\Phi_{p_1\cdots p_k}(x^{np_1^{-1}\cdots p_k^{-1}}).$$

2*. 证明：$\Phi_n(x)=\prod\limits_{d\mid n}(x^{n/d}-1)^{\mu(d)}$，这里 μ 是墨比乌斯函数；由此给出 $\Phi_n(x)(n\leqslant 10)$ 的确切表达式.

3*. 设 k 是正整数，$k>1$. 证明：$\Phi_n(x^k)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约的充分必要条件是 k 的任一素因子均整除 n.

4. 设 n 是正整数，p 是素数，$p\equiv 1 \pmod{n}$. 证明：同余方程 $\Phi_n(x)\equiv 0 \pmod{p}$ 恰有 $\varphi(n)$ 个解，它们是模 p 的 n 阶元.

第九章　多元多项式

§24. 唯一分解与恒等定理

本章中我们考虑环 D 上的多元多项式环 $D[x_1,\cdots,x_n]$. 这里的 D 为 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{F}_p$.

$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中每一个多项式 F 具有形式

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},\tag{1}$$

其中系数 $a_{i_1\cdots i_n}\in D$,而 $i_1,\cdots,i_n$ 为非负整数,满足

$$0\leqslant i_1\leqslant d_1,\quad\cdots,\quad 0\leqslant i_n\leqslant d_n.$$

(1)中的表示可改写成

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_n=0}^{d_n}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}\Big)x_n^{i_n};$$

从而 F 可以表示为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{d_n}F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^j,\tag{2}$$

其中 F_j 是(不定元为 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的)$n-1$ 元多项式.

我们称每一项 $a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 为**单项式**,并且在 $a_{i_1\cdots i_n}\neq 0$ 时,定义这**单项式的次数**为诸 x_i 的幂次之和,即

$$\deg(a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})=i_1+\cdots+i_n.$$

如果一个多项式 F 的所有具有非零系数的单项式均有次数 d,则称 F 为 **d 次齐次多项式**,或 d 次型.

对(1)给出的 n 元多项式,我们将其次数相同的单项式收集在一

起，可将 F 唯一地表示为齐次部分的和：

$$F = F_{k_1} + \cdots + F_{k_r}, \tag{3}$$

其中 F_{k_i} 是 k_i 次齐次式（称为 F 的一个**齐次部分**），而 $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_r$.

当 F 表示为(3)的形式时，我们将 k_r 定义为 F 的**总次数**（简称次数），记作 $\deg F = k_r$. 换句话说，F 的次数是指其次数最高的齐次部分的次数.

我们注意，F 的次数与 F 关于某个不定元的次数是两个不同的概念. 例如，将 F 表示为形式(2)，如 d 是最大的下标使 $F_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 为非零多项式，则我们说 F 关于 x_n 的次数为 d.

我们在引言中已提及 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的元素可定义加、减与乘法运算，$D[x_1,\cdots,x_n]$ 对这些运算形成一个（交换）环. 此外，我们在 §15 中证明过，D 上的一元多项式环没有零因子，这一结论对 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 也成立，从而 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中消去律成立.

定理 1　设 F,G 是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个非零多项式，则 FG 也是非零多项式.

证明　归纳法. 当 $n=1$ 时结论已得出证明. 假设结论在 $n-1$ 时已成立，现在设 F,G 均是 n 元（非零多项式），由(2)，我们将 F,G 表示为

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=0}^{k} F_j x_n^j, \quad G(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=0}^{l} G_j x_n^j.$$

其中 F_j,G_j 均属于 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$，且 $F_k \neq 0, G_l \neq 0$. 显然，FG 中关于 x_n 的最高次幂为 x_n^{k+l}，其“系数”为 $F_k \cdot G_l \neq 0$（归纳假设）. 从而 FG 不是零多项式.

推论　设 F,G 中是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个非零多项式，则

$$\deg FG = \deg F + \deg G.$$

证明　将 F 与 G 表示为齐次部分的和：

$$F=\sum_{i=1}^{r}F_{k_i},\quad G=\sum_{j=1}^{s}G_{l_j},$$

其中 $0\leqslant k_1<\cdots<k_r,0\leqslant l_1<\cdots<l_s$. 则

$$FG=\sum_{i,j}F_{k_i}G_{l_j}. \tag{4}$$

由定理 1 知每一项 $F_{k_i}G_{l_j}$ 都非零多项式. 又易见 $F_{k_i}G_{l_j}$ 是齐次式且次数为 k_i+l_j. 于是 $F_{k_r}G_{l_s}$（在(4) 式右端只出现一次）是 FG 的次数最高的齐次部分. 从而

$$\deg FG=k_r+l_s=\deg F+\deg G.$$

多元多项式的整除及不可约的概念与一元多项式的情形类似. 设 $F,G\in D[x_1,\cdots,x_n]$ 且 G 非零. 如果存在 $H\in D[x_1,\cdots,x_n]$ 使 $F=GH$，则称 G **整除** F，记作 $G|F$，并且称 G 是 F 的一个**因式**. 按定义不难建立关于多元多项式整除的基本性质（类似于 §15，定理 1），我们略去细节.

设 $P\in D[x_1,\cdots,x_n]$，且 P 非常数，如果 P 在 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中没有除常数之外的因式，则称 P 是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的**不可约多项式**. 例如，次数为 1 的多项式是不可约多项式.

下面的唯一分解定理是 §16，定理 3 及 §21，定理 1 的推广.

定理 2　设 $F\in D[x_1,\cdots,x_n]$ 且 $\deg F\geqslant 1$. 则 F 可分解为 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中有限个不可约多项式的积；并且，如果不计常数因子及乘积中因式的次序，这些不可约多项式是唯一决定的.

注记　定理2的第一部分，即 F 具有所说的分解，不难由上述推论通过对 $\deg F$ 归纳来证明. 但分解的唯一性的论证则较为复杂，其细节本书略去. 我们这里仅提及其基本精神：

容易知道，当 $n\geqslant 2$ 时，$D[x_1,\cdots,x_n]$ 没有像 §15，定理 3 那样的带余除法；并且也不是主理想整环. 因此我们不能采用 §16 的方法证明

分解的唯一性.

论证可采用对 n 归纳,并推广 §21 的处理来进行. 当 $n=1$ 时,结论已在前面证明过. 我们归纳地假设 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 是唯一分解环. 注意 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的 n 元多项式可看作以 $n-1$ 元多项式环 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 中元素为"系数",而以 x_n 为不定元的一元多项式环(参考(2)). 由于 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 具有唯一分解性,我们可定义其中的最大公因式,以及本原多项式等概念,并证明类似的高斯引理(参考 §21,引理 1 的注记). 此外,类似于由 $\mathbf{Z}$ 构作域 $\mathbf{Q}$,我们能够由 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 构作其"商域",其元素为 $D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 中两个多项式之商(分母不为零),称为不定元 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的有理函数域,记为 $D(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 采用 §15 与 §16 的类似论证,可以证明,以域 $D(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 中元素为"系数",x_n 为不定元的多项式环 $D(x_1,\cdots,x_{n-1})[x_n]$ 中可以作带余除法,从而是唯一分解环. 进而,推广 §21 的手法便能够证明 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 也是唯一分解环($D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 相当于 $\mathbf{Z}$,而 $D(x_1,\cdots,x_{n-1})[x_n]$ 则相当于 $\mathbf{Q}[x]$).

对给定的 $F\in D[x_1,\cdots,x_n]$,将 F 分解为不可约多项式的积通常相当困难. 下面的因式定理提供了确定 F 的因式的一种基本方法(比较 §17,定理 1).

定理3　设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$,且关于的 x_n 次数至少是 1. 如果有一个 $n-1$ 元多项式 $G(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$,使得当 x_n 换为 $G(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 时,F 为零多项式,则 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 有一个因式 $x_n-G(x_1,\cdots,x_{n-1})$.

证明　将 F 表示为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{d}F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^j,$$

其中 $d\geqslant 1$,而 $F_j\in D[x_1,\cdots,x_{n-1}]$. 由于

$$\sum_{j=0}^{d} F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})G^j(x_1,\cdots,x_{n-1}) = 0,$$

因此

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=0}^{d} F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})(x_n^j - G^j(x_1,\cdots,x_{n-1})).$$

显然,对 $0 \leqslant j \leqslant d$,多项式 $x_n^j - G^j(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 有因式

$$x_n - G(x_1,\cdots,x_{n-1}),$$

由此即知 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 也如此.

设 $D^n = D \times \cdots \times D = \{(d_1,\cdots,d_n) \mid d_i \in D, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 正如一元多项式的情形,一个多项式 $F(x_1,\cdots,x_n) \in D[x_1,\cdots,x_n]$ 可以看作是 D^n 上的一个函数(其值在 D 中). 设

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},$$

对任意 $(d_1,\cdots,d_n) \in D^n$, 我们定义

$$F(d_1,\cdots,d_n) = \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1\cdots i_n} d_1^{i_1}\cdots d_n^{i_n} \in D.$$

$F(d_1,\cdots,d_n)$ 称为 F 在 $(d_1,\cdots,d_n)$ 处的值.

定理 4　设 D 有无穷多个元素, $F \in D[x_1,\cdots,x_n]$ 是一个 n 元多项式. 如果对每个 $(d_1,\cdots,d_n) \in D^n$, F 在 $(d_1,\cdots,d_n)$ 处的值都是零,则 F 是零多项式.

证明　采用归纳法. 当 $n = 1$ 时,由 § 17,推论 3 知结论成立. 假设结论在 $n-1$ 时成立,现在设 $F \in D[x_1,\cdots,x_n]$ 具有定理中说的性质. 记

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=0}^{k} F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^j.$$

并设 $(d_1,\cdots,d_{n-1})$ 是 D^{n-1} 中任一元. 考虑一元多项式

$$f(x) = F(d_1,\cdots,d_{n-1},x) = \sum_{j=0}^{k} F_j(d_1,\cdots,d_{n-1})x^j.$$

由假设,对任意 $d \in D$,$f(d)$ 均为零,从而 $f(x)$ 为零多项式. 因此

$$F_j(d_1,\cdots,d_{n-1}) = 0,\quad 0 \leqslant j \leqslant k,$$

对任意 $(d_1,\cdots,d_{n-1}) \in D^{n-1}$ 成立. 由归纳假设,对每一个 j,$F_j(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是零多项式,因此 $F = 0$.

推论　设 D 有无穷多个元素,$F,G \in D[x_1,\cdots,x_n]$,且对所有 $(d_1,\cdots,d_n) \in D^n$ 有 $F(d_1,\cdots,d_n) = G(d_1,\cdots,d_n)$. 则 $F = G$.

上面的推论,称为恒等定理,它表明当 D 有无穷多个元素时,$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的两个多项式作为 D^n 上的(多项式)函数恒等,与它们作为(形式)多项式相等是一致的(参考 §17,推论 3 下面的注记 2).

习　题　24

1. (i) 证明:多项式 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 与 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ 均是 $\mathbf{R}[x_1,x_2,x_3]$ 中不可约多项式;

(ii) 研究(i) 中的多项式在 $\mathbf{F}_2[x_1,x_2,x_3]$ 中是否可约.

2. 设 n 为正奇数,且不是 3 的倍数. 证明:$\mathbf{R}[x_1,x_2]$ 中多项式 $(x_1 + x_2)^n - x_1^n - x_2^n$ 被 $x_1x_2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ 整除.

3. 设 D 有无穷多个元素,$F(x_1,\cdots,x_n)$, $G(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个多项式,且 G 不为零. 如果对于使 $G(d_1,\cdots,d_n) \neq 0$ 的任一组元素 $d_1,\cdots,d_n \in D$ 都有 $F(d_1,\cdots,d_n) = 0$. 证明 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 是零多项式.

4*. 设 D 有无穷多个元素,E 是 D 的一个无限子集,$F(x_1,\cdots,x_n) \in D[x_1,\cdots,x_n]$. 如果对任意 $(d_1,\cdots,d_n) \in E^n$ 有 $F(d_1,\cdots,d_n) = 0$,则 F 是零多项式.

5*. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$，并且 F 关于 x_i 的次数至多是 $a_i(1\leqslant i\leqslant k)$. 令 $A_i\subset D$，且 A_i 有 a_i+1 个元素$(1\leqslant i\leqslant n)$. 如果对任意$(d_1,\cdots,d_n)\in A_1\times\cdots\times A_n$，有 $F(d_1,\cdots,d_n)=0$，则 F 是零多项式.

§25. 齐次多项式与对称多项式

本节讲述 n 元齐次多项式与对称多项式的一些基本性质.

齐次多项式的下述性质往往用作其定义.

定理 1　设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$，$F\neq 0$. 则 F 是 k 次的齐次多项式的充分必要条件为：在 $D[x_1,\cdots,x_n,t]$ 内，关系式

$$F(tx_1,\cdots,tx_n)=t^kF(x_1,\cdots,x_n) \tag{1}$$

成立.

证明　所说的条件显然是必要的. 为证其充分性，我们将 F 表示为齐次部分的和：

$$F=F_{k_1}+\cdots+F_{k_r},\quad 0\leqslant k_1<\cdots<k_r,$$

其中 F_{k_i} 是 k_i 次齐次式. 此时等式(1)成为

$$t^{k_1}F_{n_1}+\cdots+t^{k_r}F_{k_r}=t^kF_{k_1}+\cdots+t^kF_{k_r},$$

即

$$(t^k-t^{k_1})F_{n_1}+\cdots+(t^k-t^{k_r})F_{k_r}=0.$$

由于 $F_{k_i}\neq 0(1\leqslant i\leqslant r)$，故必须 $t^k=t^{k_i}$ 对 $i=1,\cdots,r$ 成立. 于是 $r=1$，而 $k_1=k$，即 F 是 k 次齐次式.

齐次多项式的积当然仍是齐次的. 反过来，我们有

定理2　设$F(x_1,\cdots,x_n)$是$D[x_1,\cdots,x_n]$中齐次多项式，则F的任一因式都是齐次的.

证明　设$F=GH$，而G不是齐次式，则G可表示为

$$G=G_i+G_{i+1}+\cdots+G_{i+j},$$

其中$G_l(i\leqslant l\leqslant i+j)$或者是零或者是$l$次齐次式，而$G_i\neq 0,G_{i+j}\neq 0$，且$j>0$；类似地，

$$H=H_k+H_{k+1}+\cdots+H_{k+l},$$

其中$H_k\neq 0,H_{k+l}\neq 0$，而$l\geqslant 0$. 于是

$$F=GH=G_iH_k+(G_{i+1}H_k+G_iH_{k+1})+\cdots+G_{i+j}H_{k+l}.$$

由于$G_iH_k\neq 0,G_{i+j}H_{k+l}\neq 0$（§24，定理1），并且

$$\deg G_iH_k=i+k<i+j+k+l=\deg G_{i+j}H_{k+l},$$

从而F不是齐次多项式，与假设矛盾.

非齐次多项式与齐次多项式有一种紧密地联系.

给定$D[x_1,\cdots,x_n]$中一个k次非齐次多项式$F(x_1,\cdots,x_n)$，我们引入一个新的不定元x_0，将F的各项乘以x_0的适当幂次，使每个单项式的次数为k. 这样产生的$D[x_0,x_1,\cdots,x_n]$中的($n+1$元)k次齐次多项式记作$F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，称为(非齐次多项式)$F(x_1,\cdots,x_n)$的**对应多项式**，也称作$F(x_1,\cdots,x_n)$的**齐次化**. 我们称$F(x_1,\cdots,x_n)$与$F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$相互对应. 不难看出

$$F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)=x_0^kF\left(\frac{x_1}{x_0},\cdots,\frac{x_n}{x_0}\right).\tag{2}$$

对每一个非齐次多项式，显然恰有一个对应的齐次多项式. 反过来，然而，对一个$n+1$元的齐次多项式，若将其一个不定元代之为1，一般对应$n+1$个不同的非齐次多项式. 我们注意，如果某个不定元在一个齐次多项式的每一项中都出现，将其代之为1，产生的多项式并非是一个对应的非齐次多项式，而是一个低次多项式. 考虑极端情形：如一个齐

次多项式的每一项包含所有不定元，则它没有对应的非齐次多项式. 四次齐次多项式

$$x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 - x_0x_1x_2^2$$

便是这样的例子.

定理 3　设 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 是两个（如上所说的）相互对应的多项式. 如果其中一个是可约的，则另一个也可约.

证明　设齐次多项式 $F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 的次数为 k，并且它可分解为两个次数分别为 r,s 的多项式的积（$r,s \geqslant 1$）：

$$F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n) = G^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)H^*(x_0,x_1,\cdots,x_n).$$

取 $x_0 = 1$，得出

$$F^*(1,x_1,\cdots,x_n) = G^*(1,x_1,\cdots,x_n)H^*(1,x_1,\cdots,x_n). \tag{3}$$

由定理的假设，(3)式左边为 $F(x_1,\cdots,x_n)$，是 k 次多项式（参见(2)），从而(3) 式右边两个多项式的次数必须分别为 r 及 s，因此 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 可约.

反过来，设非齐次多项式 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 可分解为

$$F(x_1,\cdots,x_n) = G(x_1,\cdots,x_n)H(x_1,\cdots,x_n), \tag{4}$$

G,H 的次数分别是正整数 r,s. 设 F^*,G^*,H^* 分别是 F,G,H 的齐次化多项式（注意 G 和 H 之一可以是齐次的，因此可能出现 $G^* = G$ 或 $H^* = H$，但两者不能都成立.）. 由(4)我们有

$$F\left(\frac{x_1}{x_0},\cdots,\frac{x_n}{x_0}\right) = G\left(\frac{x_1}{x_0},\cdots,\frac{x_n}{x_0}\right)H\left(\frac{x_1}{x_0},\cdots,\frac{x_n}{x_0}\right).$$

两边乘以 x_0^{r+s}，产生

$$F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n) = G^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)H^*(x_0,x_1,\cdots,x_n),$$

于是 $F^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 是可约的.

对称多项式是多元多项式中另一类重要的多项式.

设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$，如果任意交换两个不定元均不改变 $F(x_1,\cdots,x_n)$，则称其为（n 元）**对称多项式**，或对称函数. 因此，对称多项式中不定元 $x_1,\cdots,x_n$ 的地位完全平等.

容易验证，两个 n 元对称多项式的和，差，积仍是对称多项式. 但对称多项式的因式不一定是对称的. $\mathbf{Z}[x_1,x_2]$ 中的对称多项式 $(x_1-x_2)^2$ 便是这样的例子. 然而，容易证明

定理 4　设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$，$F\neq 0$，且 F（在 D 上）可分解为 $G\cdot H$. 如果 G 是对称多项式，则 H 也是对称多项式.

由 §24 中定理 1 的推论与定理 3，上面的定理 2 和定理 4，能够作出某些齐次的对称多项式的（标准）分解.

例 1　求 $\mathbf{R}[x_1,x_2,x_3]$ 中多项式

$$(x_1+x_2+x_3)^5-x_1^5-x_2^5-x_3^5$$

的标准分解.

解　将所说的多项式用 F 表示. 当 $x_3=-x_2$ 时，F 为零. 所以 x_2+x_3 是 F 的一个因式；同理，x_3+x_1 与 x_1+x_2 也是 F 的因式. 这三个因式显然两两互素，故 F 以 $G=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$ 为其因式.

由于 $\deg F=5$，而 G 是三次的齐次对称多项式，故 F 剩下的因式 H 是二次的齐次对称多项式，从而 H 必为

$$a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+b(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

的形式，其中 a,b 是不全为零的实数. 在 $F=GH$ 中取

$$x_1=x_2=x_3=1,$$

得出 $a+b=10$；取

$$x_1=2,\quad x_2=1,\quad x_3=0,$$

得 $5a+2b=35$. 故 $a=b=5$. 于是

$$H=5(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$

易知这是 $\mathbf{R}$ 上的不可约多项式(习题 24.1). 由此我们得出了 F 的标准分解为

$$5(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$$
$$\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$

习　题　25

1*. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$, F 关于不定元 x_i 的(形式)**偏微商**定义为 F 关于 x_i 的微商,而其余不定元视为常数,记作 $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. 证明:如 $F,G\in D[x_1,\cdots,x_n]$, $a,b\in D$,则(对 $1\leqslant i\leqslant n$)

(i) $\dfrac{\partial(aF+bG)}{\partial x_i}=a\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+b\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$;

(ii) $\dfrac{\partial(FG)}{\partial x_i}=G\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+F\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$.

2*. (**欧拉定理**)　设 $D\subseteq\mathbf{C}$, $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$, $F\neq 0$. 则 F 是 k 次齐次式的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=kF.$$

举例说明,上述结论在 $D=\mathbf{F}_p$ 时不成立.

3. 在 $\mathbf{R}[x_1,x_2]$ 中,求 $(x_1+x_2)^7-x_1^7-x_2^7$ 的标准分解.

4. 在 $\mathbf{R}[x_1,x_2,x_3]$ 中,求下列多项式的标准分解:

(i) $x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)^2+8x_1x_2x_3$;

(ii) $(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3$;

(iii) $x_1(x_2^4-x_3^4)+x_2(x_3^4-x_1^4)+x_3(x_1^4-x_2^4)$.

5. 设 $F(x_1,x_2)$ 是 $D[x_1,x_2]$ 中的一个对称多项式,且有一个因式 x_1-x_2. 证明:$(x_1-x_2)^2$ 整除 $F(x_1,x_2)$.

6*. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$ 是对称多项式，则 F 的每个齐次部分也是对称多项式.

§26. 对称多项式基本定理

设 $x_1,\cdots,x_n$ 为不定元. 引入一个新的不定元 x，记

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ &= x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

则 x 的幂的系数

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1+x_2+\cdots+x_n, \\ \sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n, \\ \quad\vdots \\ \sigma_n = x_1x_2\cdots x_n \end{cases} \tag{2}$$

显然是 (n 元) 对称多项式(任意交换 x_i 与 x_j 不改变(1)式左边，从而也不改变其右端). $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 称为(不定元)$x_1,\cdots,x_n$ 的**初等对称多项式**，或初等对称函数. 很明显，σ_i 是 i 次齐次多项式.

下面的结果，称为**对称多项式基本定理**，表明初等对称多项式在对称多项式中具有基本的重要性.

定理 1　$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中任意对称多项式 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 可写成初等对称多项式的一个多项式. 即存在 $D[y_1,\cdots,y_n]$ 中的一个多项式 $G(y_1,\cdots,y_n)$，使得

$$F(x_1,\cdots,x_n)=G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n). \tag{3}$$

证明　对任意两个(不同类的) n 元单项式，可以**字典式地排列**(顺序)：一项 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 称为在另一项 $x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ 之前，如果数

$$k_1-l_1,\cdots,k_n-l_n$$

中第一个不为零的数是正的.

我们将 $F(x_1,\cdots,x_n)$ (的项)按字典排列法排序,设其首项是

$$ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},\quad a\in D,a\neq 0 \tag{4}$$

(注意,它不一定具有最大的次数). 容易看出,(4)作为对称多项式的首项,必有 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_n\geqslant 0$. 因若有 i 使 $k_i<k_{i+1}$,则由于 F 是对称的,故 F 在包含(4)的同时必包含

$$ax_1^{k_1}\cdots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\cdots x_n^{k_n}.$$

但这一项却在(4)中的项之前,从而(4)不是首项.

此外,由(2)可知,(齐次)对称多项式 $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$ 中的首项是

$$x^{l_1+\cdots+l_n}x_2^{l_2+\cdots+l_n}\cdots x_n^{l_n},$$

故 $a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_n^{k_n}$ 中的首项与 F 中的首项相同. 于是,对称多项式

$$F_1(x_1,\cdots,x_n)=F(x_1,\cdots,x_n)-a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_n^{k_n}$$

(重作字典排列后的)首项在 F 的首项之后. 对 F_1 重复上面的手续,如此进行,便产生 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中一列对称的多项式

$$F_1,F_2,F_3,\cdots,F_l,\cdots,$$

使 F_{i+1} 等于 F_i 减去形如 $a_i\sigma_1^{j_1}\cdots\sigma_n^{j_n}$ 的多项式($a_i\in D$),并且 F_{i+1} 的首项在 F_i 的首项之后. 由于在项(4) 之后的(不同类的) 单项式只有有限多个,故上述过程有限步后必然停止,即存在 l 使 $F_l(x_1,\cdots,x_n)=0$. 由此即知,存在 D 上的多项式 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 使等式(3) 成立.

注记　1. 定理 1 的证明过程提供了一个将给定的对称多项式表示为 σ_i 的多项式的实际表示方法. 这一手法与(域上) 一元多项式环的欧氏算法类似. (参考 §15 以及 §13,定理 2 的注记.)

2. 我们将 $i_1+2i_2+\cdots+ni_n$ 称为单项式 $a\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\cdots\sigma_n^{i_n}$ 的**权**,而多项式 $G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的权指的是它的各项中所出现的最高权. 由上述证明不难看到,如果 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 的次数是 k,则求得的表达式 $G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的权为 k. 此外,如果 F 是齐次的,则 G 中各项的权相等. 这些观察对实际地作出表示将有所帮助.

现在我们进一步证明，一个对称多项式表示为 σ_i 的多项式的方式是唯一的. 换句话说，表示的形式不依赖于作出表示的方法.

定理 2　设 $G_1(y_1,\cdots,y_n)$ 及 $G_2(y_1,\cdots,y_n)$ 是 $D[y_1,\cdots,y_n]$ 中两个多项式，如果在 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中有

$$G_1(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=G_2(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),$$

则 $G_1(y_1,\cdots,y_n)=G_2(y_1,\cdots,y_n)$.

证明　我们只要证明：如果 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 不是零多项式，则 $G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 也不是（$D[x_1,\cdots,x_n]$ 中的）零多项式.

我们将 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 中任一非零项

$$ay_1^{k_1},\cdots,y_n^{k_n}$$

与 $a\sigma_1^{k_1}\cdots\sigma_n^{k_n}$（作为 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中多项式）按字典排列的首项

$$ax_1^{k_1'}\cdots x_n^{k_n'}$$

对应，这里

$$\begin{aligned}k_1'&=k_1+k_2+\cdots+k_n,\\k_2'&=k_2+\cdots+k_n,\\&\vdots\\k_n'&=k_n.\end{aligned}\tag{5}$$

由(5)可见，上述对应是一个单射. 特别地，如果 $ax_1^{k_1'}\cdots x_n^{k_n'}$ 是上述对应的诸首项中最前面的项，则它只出现一次. 所以，当 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$（分别）代换 $y_1,\cdots,y_n$ 时，作为 $D[x_1,\cdots,x_n]$ 中多项式 $G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$（字典排列）的首项，$ax^{k_1'}\cdots x_n^{k_n'}$ 不会被消去. 因此 $G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 不是零多项式. 证毕.

若 x_i 不是不定元，而是 D 中的元素，例如，是 $\mathbf{C}[x]$ 中多项式 $f(x)$ 的根时，对称多项式间的关系仍然保持成立. 因此，由前面的结果知，$f(x)$ 的根的任一对称（多项式）函数可以用 $f(x)$ 的系数表示，而不必

求出根.

作为一个例子,我们考虑 $\mathbf{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ 中多项式

$$\Delta(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2.$$

显然,这是一个对称多项式. 由定理 1 和定理 2,有唯一的整系数多项式 $D(y_1,\cdots,y_n)$, 使得

$$\Delta(x_1,\cdots,x_n)=D(\sigma_1,\cdots,\sigma_n).$$

给定 $\mathbf{C}[x]$ 内一个 n 次多项式

$$f(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_0,$$

设其 n 个复根为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 我们定义 $D(f)=\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 $f(x)$ 的**判别式**,显然,$f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $D(f)=0$. 由韦达定理知

$$D(f)=D(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0).$$

因此,我们实际上不必求出 $f(x)$ 的根, 即可由 $f(x)$ 的系数判断 $f(x)$ 是否有重根.

例 1　(i) 二次多项式 $x^2-a_1x+a_0$ 的判别式是

$$a_1^2-4a_0;$$

(ii) 三次多项式 $x^3-a_2x^2+a_1x-a_0$ 的判别式是

$$a_2^2a_1^2-4a_2^3a_0-4a_1^3-27a_0^2+18a_2a_1a_0.$$

解　(i) 因为

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,x_2)&=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=\sigma_1^2-4\sigma_2,\end{aligned}$$

由此即得结果.

(ii) 我们注意

$$\Delta(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$$

是 6 次的齐次式,所以它可(唯一地)表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的各项的权均为 6

的多项式(参考定理1及其注记2).易求出方程$i_1+2i_2+3i_3=6$共有7组非负整数解:

$$(i_1,i_2,i_3)=(6,0,0),\ (4,1,0),\ (3,0,1),$$
$$(2,2,0),\ (1,1,1),\ (0,3,0),\ (0,0,2);$$

相应地,我们有表示

$$\Delta(x_1,x_2,x_3)=c_1\sigma_1^6+c_2\sigma_1^4\sigma_2+c_3\sigma_1^3\sigma_3$$
$$+c_4\sigma_1^2\sigma_2^2+c_5\sigma_1\sigma_2\sigma_3+c_6\sigma_2^3+c_7\sigma_3^2, \tag{6}$$

其中$c_i(1\leqslant i\leqslant 7)$是待定的常数.

在恒等式(6)中逐次取x_1,x_2,x_3的特殊值,可以确定这些常数.例如,取$x_1=x_2=0$,得

$$c_1=0;$$

取$x_1=1,x_2=-1,x_3=0$,得

$$c_6=-4.$$

取$x_1=2,x_2=1,x_3=0$,得

$$81c_2+18c_4=18,$$

取$x_1=2,x_2=-1,x_3=0$,得

$$-c_2+4c_4=4.$$

所以$c_2=0,c_4=1$.同样地,我们可求出

$$c_3=-4,\quad c_5=18,\quad c_7=-27.$$

由此即得出所说的结果.

注记　如果$f(x)$是(首项系数为1的)实系数多项式,则$f(x)$的判别式能给出其实根的某些信息.

在$f(x)$为二次及三次的情形,容易证明,$f(x)$的根均为实数的充分必要条件是$D(f)\geqslant 0$.

$f(x)$为二次时,所说的结论是熟知的.

当$f(x)$为三次时,如其三个根均为实数,则显然$D(f)\geqslant 0$. 反过

来，设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

的三个根 x_1,x_2,x_3 中有一个非实数，设为 x_1. 则 x_2,x_3 之一为 x_1 的共轭（参考习题 19.1），无妨设 $x_2=\overline{x_1}$. 那么 $(x-x_1)(x-x_2)$ 为实系数，从而 x_3 是实数. 现在

$$\overline{x_1-x_2}=-(x_1-x_2),$$
$$\overline{x_1-x_3}=x_2-x_3,$$
$$\overline{x_2-x_3}=x_1-x_3.$$

故

$$D(f)=-|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)|^2<0.$$

在 $f(x)$ 的次数大于 3 时，记 r 为其实根的个数，则

$$\deg f\equiv r \pmod 2 \quad (\S 19,\text{定理 3 的推论}).$$

进一步，能够证明，$D(f)\geqslant 0$ 的充分必要条件是

$$\deg f\equiv r \pmod 4.$$

习　题　26

1. 将下面的对称多项式表示为初等对称多项式的多项式：

(i) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

(ii) $x_1(x_2^3+x_3^3)+x_2(x_3^3+x_1^3)+x_3(x_1^3+x_2^3)$.

(iii) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$.

2. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)\in D[x_1,\cdots,x_n]$ 是对称多项式，满足

$$F(x_1+a,\cdots,x_n+a)=F(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 a 是任意常数. 设 $F(x_1,\cdots,x_n)=G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$. 证明

$$n\frac{\partial G}{\partial\sigma_1}+(n-1)\sigma_1\frac{\partial G}{\partial\sigma_2}+\cdots+\sigma_{n-1}\frac{\partial G}{\partial\sigma_n}=0.$$

3. 确定并证明，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 中哪些是不可约多项式.

4*. 设 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$，$D(f)$ 是 $f(x)$ 的判别式. 证明：$D(f)=0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素.

5*. 记 $s_k=x_1^k+\cdots+x_n^k$，　$k=1,2,\cdots$，这称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的方幂和. 下面的结果，称为**牛顿**(Newton)**恒等式**，给出了 s_k 与 σ_i 之间的递推关系：

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0,\quad \text{如 } k\leqslant n;$$

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n s_{k-n}=0,\quad \text{如 } k>n.$$

6. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为复系数多项式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根，定义

$$s_k=x_1^k+\cdots+x_n^k,\quad k=1,2,\cdots.$$

又设 $|s_k|\leqslant 1\ (k=1,2,\cdots,n)$. 证明：$|a_k|\leqslant 1\ (k=1,2,\cdots,n)$.

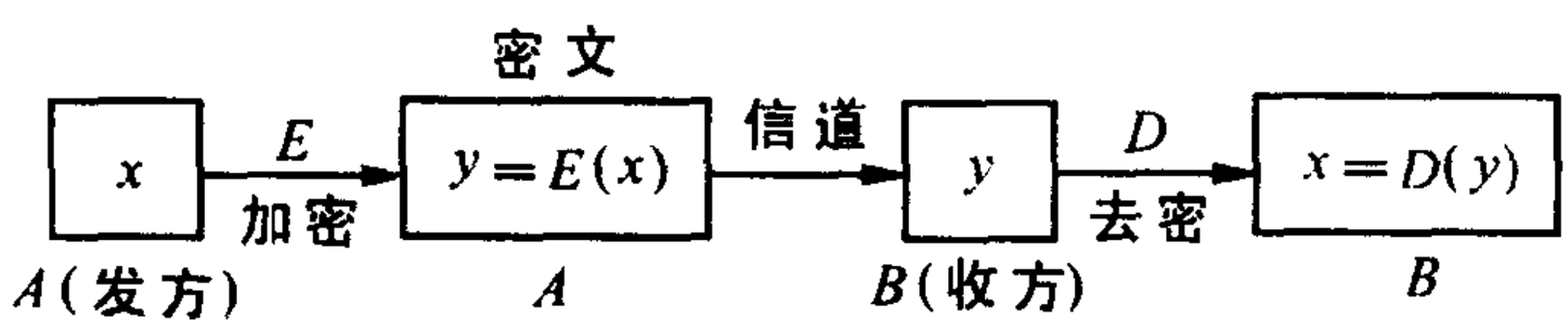
7. 设 x_1,x_2,x_3 是整系数三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的根，记 $s_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$. 证明：s_n 是整数($n=1,2,\cdots$).

附录　应用举例

1. 公开密钥体制

20 世纪 60 年代以来，电子计算机和数字通信技术得到飞速进步，计算机科学和信息科学提出了具有实际应用背景的许多数学问题，数论、代数和组合数学等离散性数学成为解决这些新问题的重要工具. 这里我们以三个具体实例，表现本书中讲述的知识在数字通信和信息安全方面的某些重要应用. 首先，本节中介绍 1976 年出现并已得到广泛应用的新型机密体制：公开密钥体制.

现代无线数字通信系统在运行中，信息很容易被第三者窃取和篡改，所以信息加密和保护非常重要. 保密通信的最简单的模型如附图 1 所示.

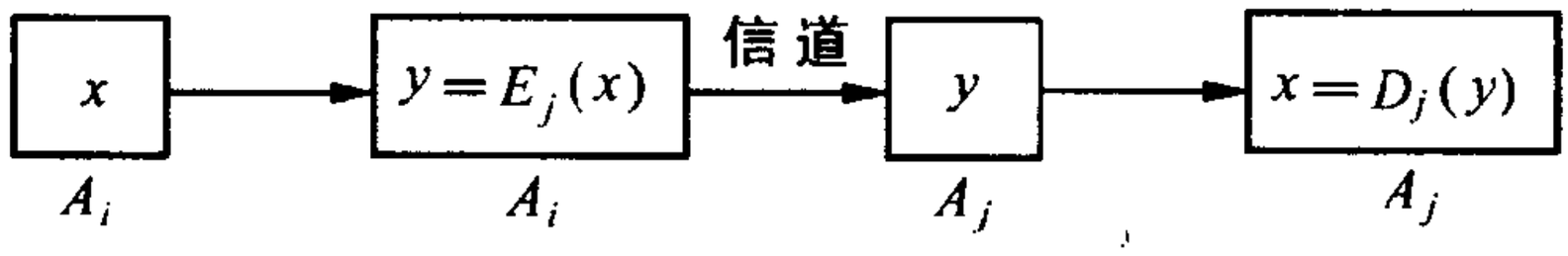


附图 1

发信人 A 把信息(明文)x 通过信道传给收信人 B. A 在传输之前把**明文** x 加密成**密文** $y=E(x)$，然后传给 B. B 在收到密文 y 之后要用 E 的逆运算 D 去密，恢复出明文 $x=D(y)$. 其中 D 和 E 这两个互逆运算只有 A 和 B 知道而对外人保密，分别叫作**加密密钥**和**去密密钥**.

现代网络通信中，每个人都要和许多人通信. 比如某公司有 2000

人，相互通信都需加密，整个公司需要$\binom{2000}{2}=1999000$对密钥，每人都需保存1999对密钥. 大量密钥保存起来很困难，而密钥丢失是非常严重的问题. 1976年，美国年青数学家和计算机专家Diffie和Hellman提出一种新的保密体制，叫作**公开密钥**(public key)体制. 这种系统的关键是使用"**单向**"(one — way)函数E作为加密密钥. 所谓"单向"即指E是可逆函数，但是由E求它的逆函数是非常困难的. 公司每个人A_i都取一个单向函数E_i作为自己的加密密钥并把它公开于众，但是把E_i的逆函数D_i作为A_i自己的去密密钥保存起来，不让别人知道. 公司把2000人的加密密钥$E_i(1\leqslant i\leqslant 2000)$装订成册，就象电话本一样可供大家查找和使用，所以每个人A_i只需保存一个自己的去密密钥D_i即可. 当A_i把信息x传给A_j时，A_i在公司密钥本上查到A_j的加密密钥E_j，A_i把$y=E_j(x)$传给A_j. A_j收到密文y之后，用只有自己知道的去密密钥D_j作用y，就得到明文$x=D_j(y)$(见附图2). 任何外人截获到密文y，即使知道是由A_i传给A_j的，也能查到E_j，但很难求出$D_j=E_j^{-1}$，所以很难恢复明文x.



附图2

公钥体制提出之后，由于解决了保存密钥造成的困难，同时也解决了下节讲述的身份认证问题，引起通信界和数学界很大反响. 一时间人们设计出五花八门的公钥具体方案，随后这些方案又不断被别人攻击和破掉. 所谓具体方案，其核心是设计一批单向函数E. 所谓被破掉，即指寻找出求E^{-1}的好的实用算法，以表示用E作为加密密钥是不可靠的. 迄今为止，基本上只有两个公钥方案被认为是可靠的，并且已普遍

用在电子商务等方面. 第一种方案与整数的因子分解有直接关系,它建立在这样一种信念上:大整数的因子分解是件十分困难的事.

纯粹数学家和应用数学家看待数学,往往有不同的美学标准. 本书§3 中讲的算术基本定理,在理论上被认为是非常漂亮的. 可是注重实际的人会问:给定一个很大的整数 N,是否有实际办法在较短时间内把 N 分解成素数的乘积?事实上,用目前最快的计算机(硬件)和已经发明的大数分解最好算法(软件),要分解 100 位(十进制)的数 N 需要几分钟,而分解 200 位的数 N(特别当 N 是两个大约 100 位的不同素数乘积时)则需要几万年!基于这个事实,就在公钥体制被提出的一年之后,1977 年美国麻省理工学院的三位年轻数学家和计算机专家 Rivest, Shamir 和 Adleman 提出下面的公钥方案,后人称为 RSA 方案.

取定两个大约 100 位的不同素数 p,q,令 $N=pq$. 则欧拉函数 $\varphi(N)=(p-1)(q-1)$. 再取两个正整数 e 和 d,使得

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$$

(当 N 很大时,这样的 (e,d) 有很多,可供不同人使用). 则有如下的简单结果(用本书的知识易于证明).

引理　设 $N=pq$,其中 p 和 q 是不同的素数. 正整数 e 和 d 满足 $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$,则对每个整数 x,均有 $x^{ed} \equiv x \pmod N$.

现在我们把信息 x 用 $0,1,2,\cdots,N-1$ 来表示. 加密密钥 E 的作用为 $y=E(x) \equiv x^e \pmod N$,$y$ 是 x^e 模 N 的最小非负剩余(目前这种运算已有很快的实用算法). 而去密密钥 D 取为 $D(y) \equiv y^d \pmod N$. 由上述引理可知 $D(y)=x$,即 E 和 D 是互逆运算.

在这种方案中 N 和 e 是公开的. 由 e 求 d 需要满足

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}.$$

但是这必需知道 $\varphi(N)=(p-1)(q-1)$ 的值. 由于分解 $N=pq$ 非常困难,外人无法知道 $\varphi(N)$,所以由 e 不能求出 d 值.

例 1　用户 B 选择两个素数 $p=11$ 和 $q=7$，则 $N=pq=77$，$\varphi(N)=60$. 用户 B 取加密密钥为与 $\varphi(N)$ 互素的 $e=7$，则 B 的去密密钥为 $d\equiv e^{-1}\equiv\frac{1}{7}\equiv 43 \pmod{60}$，即 $d=43$. 用户 B 把 $N=77, e=7$ 公开，而对 $d=43$ 保密. 现在用户 A 想把明文 $x\equiv 2 \pmod{77}$ 发送给用户 B，用户 A 先加密成

$$y=x^e=2^7\equiv 51 \pmod{77},$$

把密文 $y=51$ 传给用户 B. 用户 B 用自己的去密密钥 $d=43$ 将 y 恢复成明文 x：

$$\begin{aligned} x &= y^d = 51^{43} \\ &\equiv 2 \pmod{77}. \end{aligned}$$

第二个方案是 1985 年提出的 ElGamal 算法，目前也得到广泛应用. 它所采用的工具是 § 9 中所述的离散对数. 设 p 为素数，α 是模 p 的一个原根，则对每个不被 p 除尽的整数 β，均存在唯一的整数 a，$0\leqslant a\leqslant p-2$，使得 $\alpha^a\equiv\beta \pmod{p}$. 对于给定的原根 α，由 a 计算 $\beta\equiv\alpha^a \pmod{p}$ 的指数运算有好的算法，但是当 p 很大（比如大于 130 位）时，由 β 求 a（离散对数）是很困难的. 基于这个想法，ElGamal 给出如下的公开密钥方案.

取定一个大素数 p，模 p 的一个原根 α. 由 B 取一个整数 $a(0\leqslant a\leqslant p-2)$. 令 $\beta\equiv\alpha^a \pmod{p}$. 将 p,α,β 公开，但是 a 由 B 保密. 设发方 A 将信息传给收方 B，发方 A 秘密地选择一个整数 $k(0\leqslant k\leqslant p-2)$，计算

$$y_1\equiv\alpha^k \pmod{p}, \qquad y_2\equiv x\beta^k \pmod{p},$$

然后将 (y_1,y_2) 传给 B. 换句话说，收方 B 的加密密钥 E 是 $E(x,k)=(y_1,y_2)$. 而收方 B 得到此密文 (y_1,y_2) 之后作运算

$$D(y_1,y_2)\equiv y_2(y_1^a)^{-1} \pmod{p}$$

（只有收方 B 知道 a）. 由于

$$y_2(y_1^a)^{-1}\equiv(x\beta^k)(\alpha^k)^{-a}=x(\beta\alpha^{-a})^k\equiv x \pmod{p},$$

即 $D(y_1,y_2)\equiv x \pmod p$，可知 D 为 B 的去密密钥，将密文恢复出明文 x. 发方 A 每次可秘密地选择不同 k 值，而收方 B 去密时不需知道 k 值，这就使外人在不知道 a（和 k）时，破译密文 (y_1,y_2) 变得更为困难.

例 2 取素数 $p=2579$ 的一个原根 $\alpha=2$. 取 $a=765$，则

$$\beta\equiv 2^{765}\equiv 949 \pmod{2579}.$$

将 p,α,β 公开，而 a 只有收方 B 知道. 现在发方 A 想把信息 $x=1299$ 发给 B. 发方 A 随意取一个整数 $k=853$，计算

$$y_1\equiv 2^{853}\equiv 435 \pmod{2579},$$

$$y_2\equiv 1299\cdot 949^{853}\equiv 2396 \pmod{2579},$$

然后 A 将密文 $(435,2396)$ 发给 B. 而 B 收到密文后计算出明文

$$x\equiv 2396\cdot(435^{765})^{-1}\equiv 1299 \pmod{2579}.$$

2. 数字签名

公钥体制所以受到广泛注意，除了大大减少了密钥保存量之外，还解决了另一个重大难题，即数字通信中的签名和身份认证问题.

在外交活动中签署文件，商业上签定合同，日常书信或银行取款的签字，传统方式是用手写签名或印鉴，起到认证或核准的作用. 当人们采用数字通信网络进行电子购物和交换文件时，如何进行签名和身份认证？比如说，A 向 B 发一个电子邮件向 B 借钱，B 如何能判定这个邮件是 A 发来的而不是别人冒名顶替？这是一个长期未能很好解决的问题. 公钥体制解决了这个问题.

先以 RSA 公钥方案为例. 设 $N=pq$，e_A 和 d_A 分别为 A 的加密密钥和去密密钥，$e_Ad_A\equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$. 其中 N 和 e_A 公开，d_A 由 A 自己保存. 设想 A 向 B 发一个信息 x. 为了向 B 表明 A 的身份，A 将明文 x 用自己的去密密钥作用：$y\equiv x^{d_A} \pmod N$，这就是 A 的签字，A 把 y 发给 B. B 收到 y 后利用公开的 e_A 作用，得到明文 $x\equiv y^{e_A} \pmod N$. 这就

验证了 A 的身份. 由于除 A 之外别人都不知道 d_A,所以外人很难伪造 A 的签名.

RSA 方案还可同时进行签名和加密功能. 设 e_B 和 d_B 分别是 B 的加密密钥和去密密钥($e_B d_B \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$). A 向 B 发信息 x,则可以按下方式进行.

(1) A 把明文 x 先签名:$y = x^{d_A} \pmod N$,再加密:

$$z \equiv y^{e_B} \pmod N,$$

然后将 z 发给 B;

(2) B 收到 z 之后,先去密:$z^{d_B} \equiv y \pmod N$,再进行

$$y^{e_A} \equiv x \pmod N.$$

B 看到明文 x,从而认证了 A 的身份.

接下来再介绍采用离散对数的 ELGamal 数字签名方案(1985 年). 取大素数 p 和模 p 的一个原根 α. 再取整数 a $(0 \leqslant a \leqslant p-2)$,计算 $\beta \equiv \alpha^a \pmod p$. 把 p,α 和 β 公开,而 a 由 A 自己保守秘密,A 在信息 x 上签名时,先随意取一个与 $p-1$ 互素的整数 k, 计算

$$\gamma \equiv \alpha^k \pmod p, \quad \delta \equiv (x - a\gamma)k^{-1} \pmod{p-1}$$

则 (γ,δ) 就是 A 在信息 x 上的签名. 由信息 x 和签名 (γ,δ),再利用公开的 p、α 和 β,任何人都可验证 A 的签名的正确性,这只需验证同余式 $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \pmod p$ 成立. 这是因为

$$\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^{a\gamma + k\delta} \equiv \alpha^x \pmod p,$$

现在考查一下这种签名方案的安全性,即外人不知道 a,对于给定的信息 x 是否能伪造 A 的签名?即外人能否找出一对整数 (γ,δ),使得 $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \pmod p$ 成立?如果选了 γ 来求 δ 满足此同余式,这是一个困难的离散对数问题. 如果选了 δ 而求 γ 满足此同余式,目前也没有好的方法. 但是要注意:A 不能用同一个 k 值对两个不同的信息 x_1 和 x_2 $(x_1 \neq x_2)$ 进行签名. 因为若 A 对 x_1 和 x_2 的签名为 (γ_1,δ_1) 和 (γ_2,δ_2). 则

$$\gamma_1 \equiv \alpha^k \equiv \gamma_2 (\bmod p),$$

从而 $\gamma_1 = \gamma_2$,记这个公共值为 γ, 则

$$k\delta_1 + a\gamma \equiv x_1, \quad k\delta_2 + a\gamma \equiv x_2 (\bmod p-1).$$

从而可把方程中外人不知道的 a 消掉而得到

$$k(\delta_1 - \delta_2) \equiv x_1 - x_2 (\bmod p-1).$$

令 d 是 $\delta_1 - \delta_2$ 和 $p-1$ 的最大公约数,上述方程给出模 $p-1$ 的 d 个解 k. 我们可以用 $\gamma \equiv \alpha^k (\bmod p)$ 来决定 $k(\bmod p-1)$ 的正确值,然后可算出

$$a \equiv (x_1 - \delta_1 k)^{\gamma-1} (\bmod p).$$

一旦 a 被外人知道,外人就可对任意信息 x 仿造 A 的签名,从而破译了 A 的上述签名方案.

注意 A 的签名(γ,δ) 没有把 a 泄漏出去. 因为在

$$\delta \equiv (x - a\gamma)k^{-1} (\bmod p-1)$$

中只有 δ, x, γ 公开. 为求 a 需要知道 k. 而从 $\gamma \equiv \alpha^k (\bmod p)$ 求 k, 是一个困难的离散对数问题.

以上我们只举了签名和身份认证的最简单情形. 实际领域还需要解决更复杂的情形. 比如说,如何防止 A 否认自己的签名?当通信双方就签名和身份等问题发生争执时,如何安排仲裁机构,这种仲裁不仅要保障解决争执,而且在仲裁过程中不能泄漏双方任何不应泄漏的信息. 这就需要设计功能更齐全的协议和方案. 此外,我们需要对各种方案的安全性进行更严密的分析. 这些问题的深入研究不仅需要更深刻的数论和代数知识,也需要信息论、计算复杂性理论、概率统计和算法逻辑等方面知识,这些实际问题是对数学家和计算机通信学家的巨大挑战.

3. 密钥分配与共享

保密通信的核心是密钥的设计，此外还有密钥的传输和管理问题. 即使通信双方事先约定的密钥，但使用一段时间之后需要更换. 如果某公司有 n 个用户，彼此使用 $\binom{n}{2}$ 密钥，需要 $\binom{n}{2}$ 个安全的通道传送密钥. 这些密钥的安全性和管理常常是一个严重的问题. 目前常采用由公司设立密钥管理中心的办法，由管理中心设计和更换密钥，只需 n 个安全通道传送(分配) 给 n 个用户. 现在介绍 Blom 于 1985 年提出的一个分配方案.

设某公司有 n 个用户 $A_1,\cdots,A_n$. 取定一个大于 n 的素数 p，再取有限域 $\mathbf{F}_p$ 中 n 个不同的元素 $r_1,r_2,\cdots,r_n$(改变 r_i 的值相当于管理中心更换密钥). p 和 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 均公开.

(1) 管理中心随机地选取 $\mathbf{F}_p$ 中三个元素 a,b,c(它们可以相同). 由此形成一个关于 x,y 的对称多项式

$$f(x,y)=a+b(x+y)+cxy\in\mathbf{F}_p[x,y],$$

系数 a,b,c 只有管理中心知道；

(2) 对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，管理中心计算

$$\begin{aligned}g_i(x)&=f(x,r_i)=a+b(x+r_i)+c(xr_i)\\&=\alpha_i+\beta_i x\in\mathbf{F}_p[x],\end{aligned}$$

并把 $g_i(x)=\alpha_i+\beta x_i$ 分配给用户 A_i. 也就是说，用户中只有 A_i 知道 $g_i(x)$ 的系数 α_i 和 β_i，其中 $\alpha_i=a+br_i$，$\beta_i=b+cr_i$；

(3) 如果用户 A_i 和 A_j 通信，则用户 A_i 计算 $g_i(r_j)\in\mathbf{F}_p$(用户 A_i 知道多项式 $g_i(x)$，而 r_j 是公开的)，用户 A_j 计算 $g_j(r_i)$. 由于

$$g_i(r_j)=f(r_j,r_i)=f(r_i,r_j)=g_j(r_i),$$

所以两个用户计算出来同一个值 $k_{ij}=g_i(r_j)=g_j(r_i)$. A_i 和 A_j 就用 k_{ij} 作为通信的密钥. 所以 A_i 和 A_j 之间不再需要传送密钥.

让我们分析一下这种密钥分配方案的安全性.

(1) 对于 A_i 和 A_j 之外的第三个用户 A_k，A_k 得不到 A_i 和 A_j 之间密钥 k_{ij} 的任何信息.

这是因为：A_k 知道管理中心发给自己的

$$g_k(x) = \alpha_k + \beta_k x \in \mathbf{F}_p[x].$$

对于 A_i 和 A_j 的信息，A_k 只知道公开值 r_i 和 r_j，但是不知道

$$g_i(x) = \alpha_i + \beta_i x \quad 和 \quad g_j(x) = \alpha_j + \beta_j x,$$

即不知道 $\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j$ 的值. 在这种情形下，由一个关系

$$g_i(r_j) = \alpha_i + \beta_i r_j = \alpha_j + \beta_j r_i = g_j(r_i)$$

来决定 k_{ij} 是不可能的. 如果 A_k 试图破译管理中心设计的多项式 $f(x,y) = a + b(x+y) + cxy$，即需要决定三个系数 a,b,c. 但是 A_k 只知道 α_k, β_k 和公开的 r_k，从而只知道 a,b,c 之间的两个关系：$\alpha_k = a + br_k$，$\beta_k = b + cr_k$，由此也不能决定出 a,b,c 的值. 再进一步，对每个元素 $l \in \mathbf{F}_p$，我们分析一下是否有 a,b,c 使得在上述两个关系之下，l 成为 A_i 和 A_j 之间的密钥. 也就是是问：是否有 $a,b,c \in \mathbf{F}_p$，使得满足如下的三元(a,b,c 为不定元)一次联立方程组

$$\begin{cases} a + b(r_i + r_j) + c(r_i r_j) = l, \\ a + br_k = \alpha_k, \\ b + cr_k = \beta_k. \end{cases}$$

由于这个方程组系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & r_i + r_j & r_i r_j \\ 1 & r_k & 0 \\ 0 & 1 & r_k \end{vmatrix} = (r_k - r_i)(r_k - r_j) \neq 0$$

(注意 $r_1, \cdots, r_n$ 是 $\mathbf{F}_p$ 中不同元素)，所以方程组在 $\mathbf{F}_p$ 中有唯一的一组解 a,b,c. 这就表明：根据 A_k 所得信息($\alpha_k, \beta_k, r_i, r_j, r_k$)，$A_i$ 和 A_j 之间以 $\mathbf{F}_p$ 中任何元素 l 为密钥的可能性均存在，所以 A_k 得不到 A_i 和 A_j 之间密钥 k_{ij} 的任何信息.

(2) 两个用户 A_k 和 A_t 联系，可以破译管理中心设计的多项式

$f(x,y)$，从而可以破译任意两个用户 A_i 和 A_j 之间的密钥.

这是因为：A_k 和 A_t 可以把管理中心分配给他们的 α_k,β_k 和 α_t,β_t 合在一起. 再加上公开值 r_k 和 r_t，给出关于 a,b,c 的四个关系式

$$\alpha_k = a + br_k, \quad \alpha_t = a + br_t,$$
$$\beta_k = b + cr_k, \quad \beta_t = b + cr_t.$$

由前两个关系给出

$$b = (\alpha_k - \alpha_t)/(r_k - r_t),$$

由后两个等式给出

$$c = (\beta_k - \beta_t)/(r_k - r_t).$$

最后有

$$a = \alpha_k - br_k.$$

所以 A_k 与 A_t 联手可以破译 $f(x,y)$.

现在介绍密钥分配的另一个方案：Diffie-Hellman 方案. 仍设有 n 个用户 $A_1,\cdots,A_n$. 管理中心选取一个大于 n 的素数 p 和模 p 的一个原根 α，再选定 n 个整数 $a_1,\cdots,a_n(0\leqslant a_i\leqslant p-2)$. 然后把 a_i 由安全通道秘密地分配给用户 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$，同时计算 $b_i\equiv\alpha^{a_i}(\mathrm{mod}\ p)$. 把 p,α 和 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均公开. 用户中只有 A_i 知道数 a_i，其他用户只知道 b_i. 要想由 b_i 计算 $a_i(b_i\equiv\alpha^{a_i}(\mathrm{mod}\ p))$，当 p 很大时，这是困难的离散对数问题.

用户 A_i 和 A_j 通信时，A_i 计算 $\mathbf{F}_p$ 中元素 $b_j^{a_i}$（A_i 知道 a_i，而 b_j 是公开的），A_j 计算 $\mathbf{F}_p$ 中元素 $b_i^{a_j}$. 由于 $b_j^{a_i}=\alpha^{a_ja_i}=b_i^{a_j}$，所以 A_i 和 A_j 算出 $\mathbf{F}_p$ 中同一个元素（记为 k_{ij}），它就用作 A_i 和 A_j 通信的密钥.

用户 A_i 和 A_j 之外的第三用户 A_k 能否算出 A_i 和 A_j 之间的密钥 k_{ij}？即给定 $\mathbf{F}_p$ 中元素 $b_i=\alpha^{a_i}$ 和 $b_j=\alpha^{a_j}$，是否可算出 $k_{ij}=\alpha^{a_ia_j}$？这个问题比离散对数问题要弱，但是可以证明这个问题的破译和前节 ElGamal 数字签名方案的破译是等价的.

任意两个用户 A_i 和 A_j 可以更换密钥，方法是：A_i 和 A_j 分别选

取 a_i' 和 $a_j'(0 \leqslant a_i', a_j' \leqslant p-2)$，然后公开 $b_i' = \alpha^{a_i'}$ 和 $b_j' = \alpha^{a_j'}$. 它们可采用新的密钥 $k_{ij}' = \alpha^{a_i'a_j'}$.

我们都知道，发射核武器的控制按钮只由一个人掌握是很危险的. 重要机密常常需要足够多的人意见一致才能开启. 在很多情形下，一个主密钥 k 要分解成一些子密钥 $k_1, \cdots, k_n$，分别由 n 个人 $A_1, \cdots, A_n$ 控制. 只有足够多的人把子密钥放在一起，才能揭示出主密钥. 这叫作**密钥共享问题**. 我们只考虑比较简单的问题：取定一个整数 $t \geqslant 2$. 我们要求：

(1) 任意 t 个子密钥放在一起均可算出主密钥 k，

(2) 任意 $t-1$ 个子密钥放在一起得不到主密钥 k 的任何信息.

这叫门限为 t 的密钥共享问题.

事实上，前节所述的 Blom 密钥分配方案也可看成是 $t=2$ 的密钥共享方案，因为可把 $f(x,y)$ 看成是主密钥，而 $a_1, \cdots, a_n$ 看成是分别发给 $A_1, \cdots, A_n$ 的子密钥. 我们在上节分析 Blom 方案安全性时指出，任意两个人 A_k 和 A_t 在一起可算出主密钥 $f(x,y)$，而每个人则不能得到 $f(x,y)$ 的任何信息. 所以这是门限为 2 的密钥共享方案. 下面，我们介绍 1979 年 Shamir 给出的门限为 t 的密钥共享方案($t \geqslant 2$).

设想把主密钥由 n 个人 $A_1, \cdots, A_n$ 共享. 选定一个大于 n 的素数 p. 由控制中心随机选取 $\mathbf{F}_p$ 中一个元素 k 作为主密钥，并随机地选取 $\mathbf{F}_p[x]$ 中一个 $t-1$ 次的多项式

$$h(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a_1x + a_0$$
$$(a_i \in \mathbf{F}_p,\ a_{t-1} \neq 0),$$

其中常数项 a_0 取为主密钥 k；控制中心再取 $\mathbf{F}_p$ 中 n 个不同的非零元素 $x_1, \cdots, x_n$(由 $p > n$ 知这是可能的)，将 $p, x_1, \cdots, x_n$ 均公开. 对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，控制中心把 $y_i = h(x_i) \in \mathbf{F}_p$ 秘密给 A_i，作为 A_i 的子密钥.

现在我们证明这是一个门限为 t 的密钥共享方案.

(1) 设任意 t 个人聚在一起. 为符号简单，不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 联手. 则知道 $h(x_i) = y_i(1 \leqslant i \leqslant t)$. 由于 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $\mathbf{F}_p$ 中不同

的(非零)元素，而 $h(x)$ 是 $\mathbf{F}_p[x]$ 中 $t-1$ 次多项式，我们在 §18 中讲述了：由 $h(x)$ 在 t 个不同点 $x_1,\cdots,x_t$ 的取值 $y_1,\cdots,y_t$ 可唯一决定这个多项式 $h(x)$. 于是算出主密钥 $k=h(0)$. 事实上，我们可以用拉格朗日插值公式给出

$$h(x)=y_1\frac{(x-x_2)\cdots(x-x_t)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_t)}+y_2\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_t)}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_t)}+$$
$$\cdots+y_t\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{t-1})}{(x_t-x_1)\cdots(x_t-x_{t-1})}.$$

因此可直接算出主密钥为

$$k=h(0)=y_1(-1)^{t-1}\frac{x_2\cdots x_t}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_t)}$$
$$+y_2(-1)^{t-1}\frac{x_1x_3\cdots x_t}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_t)}+$$
$$\cdots+y_t(-1)^{t-1}\frac{x_1\cdots x_{t-1}}{(x_t-x_1)\cdots(x_t-x_{t-1})}.$$

(2) 如果 $t-1$ 个人联手，不妨设 $A_1,\cdots,A_{t-1}$ 联手. 即从 $h(x_i)=y_i$ $(1\leqslant i\leqslant t-1)$ 是否能得到主密钥 k 的任何信息？也就是说，是否能够判定 $\mathbf{F}_p$ 中某个元素比较倾向于为主密钥呢？为此，我们对 $\mathbf{F}_p$ 中任意元素 l，看它是否有 $\mathbf{F}_p[x]$ 中 $t-1$ 次多项式 $h_1(x)$，使得

$$h_1(x_i)=y_i(1\leqslant i\leqslant t-1)$$

并且 $h_1(0)=l$？由于 $x_1,\cdots,x_{t-1}$ 均为非零元素，所以上述条件相当于多项式在 t 个不同点 $x_1,\cdots,x_{t-1},0$ 处的取值. 满足这些条件的 $\mathbf{F}_p[x]$ 中 $t-1$ 次多项式 $h_1(x)$ 是存在并且唯一的. 换句话说，当 $A_1,\cdots,A_{t-1}$ 联手，即在

$$h(x_i)=y_i(1\leqslant i\leqslant t-1)$$

的条件下，每个元素 $l\in\mathbf{F}_p$ 都以同样的可能性成为主密钥. 所以 $t-1$ 个人联手得不到主密钥的任何信息.

部分习题提示和注释

习　题　1

2. 在习题 1.1 中以 $-b$ 代换 b 得出.

3. 连续两个整数中必有一个偶数.

5. 配对.

6. $n \leqslant m$ 时易于证明;当 $n > m$ 时用带余除法化为前一种情形.

9. 反复用带余除法.

10. 对任意整数 n,有 $[x+n]=[x]+n$. 由此易知,可假设 α_i 满足 $0 \leqslant \alpha_i < 1$ 来论证.

习　题　2

1. 证明 a 与 b 互素,最基本的做法是选择 x,y,建立裴蜀等式

$$ax+by=1.$$

2. 选择适当的 r(及 x,y),建立等式

$$ax+by=r.$$

设 $(a,b)=d$,则 $d|r$. 所谓适当的 r 是指:由 $d|r$ 能够通过进一步的论证导出 $d=1$;或者 r 的约数很少,进而可以由排除法证得 $d=1$.

3. 上面说的等式等价于 $a|(by-r)$ 或 $b|(ax-r)$. 利用整除,这些往往更容易导出来.

就本题而言,由于 m 是奇数,故 $(2^n+1)|(2^{mn}+1)$;又 $(2^m-1)|(2^{mn}-1)$. 从而

$$(2^n+1)\mid((2^m-1)q+2),\ q\text{ 是一个整数}.$$

由此知$(2^m-1,2^n+1)=1$或2,显然这只能为1.

4. 对指数作欧氏算法.

5. 当$a\mid b$或$b\mid a$时结论显然成立.下面考虑相反的情形.由于$ax+by=d$有整数解,这里$d=(a,b)$.无妨设$a>0$,作带余除法,$x=bq+r$,这里$0<r<|b|$,我们有

$$ar+b(aq+y)=d.$$

易知$0<|aq+y|=\left|\dfrac{ar-d}{b}\right|<|a|$.

6. 用定理4(iv)可得出证明.

7. (i) $(d,mn)=(d,m)\left(\dfrac{d}{(d,m)},\dfrac{mn}{(d,m)}\right)=(d,m)\left(\dfrac{d}{(d,m)},n\right)=(d,m)(d,n)$;

(ii) 利用(i)即得出证明.

8. (i) 可先对$(a,b)=1$的情形证明;

(ii) 设$d=(a,c)$,则$d^n=(a^n,c^n)=(a^n,ab)=a$.同样,$b=(b,c)^n$.

9. 由于$(n,n+1)=1$,可将问题分解为证明$2(1^k+\cdots+n^k)$分别被n及$n+1$整除;配对!

10. 用定理2.

13. 解答习题2.5的方法.

14. (i) 全部解是$x=10-2u-3v,y=u,z=v$,其中u,v是任意整数;

(ii) 三元一次不定方程可化为上述特殊情况.方程中未知数系数的绝对值以6为最小,用6除方程的两边,得

$$x=-3y+2z+4+\frac{-2y+3z-1}{6}.$$

于是应有整数u,使得

$$-2y+3z-1=6u. \tag{1}$$

方程(1)中,未知数系数的绝对值最小者为$2(<6)$,将(1)两边同除以

2，得到 $y = z + \frac{z-1}{2} - 3u$，于是应有整数 v，使得 $z - 1 = 2v$（有一个未知数的系数为 1），即 $z = 2v + 1$. 代入(1)式得 $y = 3v - 3u + 1$，于是 $x = 10u - 5v + 3$，(u，v 是任意整数).

也可将三元一次不定方程化为二元一次方程求解（利用习题 2.11）.

习 题 3

1. 当 n 不太大时，这可以实际地判别 n 是否为素数.

4. 例如，$(n+1)! + 2, \cdots, (n+1)! + (n+1)$ 符合要求.

5. 修改定理 1 的证法. 注意，形如 $4m + 3$ 的数必有一个素因子仍具有这种形式.

9. (i) 如 m 不是 2 的幂，则 m 有一个奇素数因子.

11. 设 $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{p}{q}$，这里 p，q 是互素的正整数. 则 $a = pu$，$c = qu$，$d = pv$，$b = qv$（u，v 为正整数）. 由此得出

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (p^4 + q^4)(u^4 + v^4).$$

注意这一分解基于整数的性质，而不是代数式的分解.

12. 注意，所说的和中只包含有限个非零项. 在 $1, 2, \cdots, n$ 中，被 p 整除的数有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 个，这其中有 $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ 个被 p^2 整除，…，有 $\left[\frac{n}{p^l}\right]$ 个被 p^l 整除. 容易看出，p^e 作为 $p, p^2, \cdots, p^e$ 的倍数在和式中恰被计入 e 次.

13. 对任一素数 p，证明 p 在分子中出现的幂次不小于在分母中出现的幂次（用习题 1.10）.

15. 设 $p^\alpha \| n$，证明 $p^\alpha \left| \frac{a^n - b^n}{a - b} \right.$. 如 $p \nmid a - b$，这显然成立；如 $p | a - b$，设 $a - b = pt$. 于是

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (pt)^{i-1} b^{n-i}.$$

证明上式右端和式中每一项均被 p^α 整除.（注意

$$\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

的分子被 p^α 整除，应用习题 3.12.）

16. 如果 d 是 n 的正约数，则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的正约数.

17. 用定理 3 的推论 2.

19. (i) 设 2^k 是不超过 n 的 2 的最高次幂，即 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$，则 2^k 在 $1,2,\cdots,n$（的标准分解）中只出现一次；

(ii) 修改(1)的处理.

习　题　4

2. 特别地，本题给出了整数被 3,9 及 11 整除的一种实用判别法.

4. 对 n 归纳.

5. 如 $(d,n)=1$，则 $(n-d,n)=1$.

10. p 个连续整数 $n,n-1,\cdots,n-p+1$ 构成模 p 的一个完系，所以其中恰有一个被 p 整除. 设 $p\mid n-i(0\leqslant i\leqslant p-1)$，则 $\left[\frac{n}{p}\right]=\frac{n-i}{p}$.

11. 分解 $\frac{a^p+b^p}{a+b}$ 并模 $a+b$，注意 $a\equiv -b \pmod{a+b}$.

12. 设 $p^e\parallel n!$，证明分子中 p 的幂次至少是 e. 如果 $p\mid b$，则因 $e\leqslant n-1$，结论显然成立. 如 $p\nmid b$，设 b^{-1} 使 $bb^{-1}\equiv 1 \pmod{p^e}$，则

$$\begin{aligned}&b^{-n}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)\\ \equiv&ab^{-1}(ab^{-1}+1)\cdots(ab^{-1}+n-1)\pmod{p^e}.\end{aligned}$$

同余式右端是连续 n 个整数之积，故被 $n!$ 整除，从而 $\equiv 0 \pmod{p^e}$. 这一手法，将成算术数列的数，在同余意义下，化为连续的整数.

习　题　5

4. 这可由 $\mathbf{Z}_m^*$ 中没有零因子推出来.

5. 等价于 §4,定理 6(ii).

7. (i) 在 $\bar{a}$ 为乘法单位 $\bar{1}$ 时结论成立. 一般情形由 $\bar{a}=\bar{a}\cdot\bar{1}$ 导出来.

8. 用威尔逊定理.

习　题　6

3. 在欧拉定理中取 $a=-1$.

7. 用费马定理(参考 §5).

8. (i) 是显然的. 当 $n=1$ 时,(ii) 显然成立;如 $n>1$,可设 $n=p_1\cdots p_k$,则所说的和等于

$$\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}=(1-1)^k=0.$$

(ii) 给出了特征函数 $f(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1\end{cases}$ 的一种解析表达式.

9. 左边的和等于

$$\sum_{x=1}^{n}f(x)\sum_{d\mid(x,n)}\mu(d)=\sum_{x=1}^{n}f(x)\sum_{\substack{d\mid x\\ d\mid n}}\mu(d)$$

$$=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{\substack{x=1\\ d\mid x}}^{n}f(x)=\sum_{d\mid n}\mu(d)S_d.$$

10. 由习题 6.8 的(ii),我们有

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{l\mid\frac{n}{d}}f(l)$$

$$= \sum_{l|n} f(l) \sum_{d|\frac{n}{l}} \mu(d) = f(n).$$

反过来，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} \sum_{l|d} \mu(l) F\left(\frac{d}{l}\right) \\ &= \sum_{l|n} \mu(l) \sum_{\substack{l|d \\ d|n}} F\left(\frac{d}{l}\right) \quad (\text{令 } d = lk) \\ &= \sum_{l|n} \mu(l) \sum_{k|\frac{n}{l}} F(k) \\ &= \sum_{k|n} F(k) \sum_{l|\frac{n}{k}} \mu(l) = F(n).\end{aligned}$$

11. 设 $(m,n) = 1$，对 mn 的任意正约数 d，记 $d_1 = (d,m)$，$d_2 = (d,n)$. 则由习题 2.7 得出，

$$\begin{aligned}H(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{m}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2}\right) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{m}{d_1}\right) f\left(\frac{n}{d_2}\right) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} f\left(\frac{m}{d_1}\right) g(d_1) \sum_{d_2|n} f\left(\frac{n}{d_2}\right) g(d_2) \\ &= H(m)H(n).\end{aligned}$$

12. 由定理 1(ii)，习题 6.11 知，等式的左边是积性函数，故只需对 n 为素数幂的情形证明.

习　题　7

6. (i) 易于证明. 由(i)知，(ii)中的必要性是显然的. 为了证明充分性，可用归纳法. 设 $x \equiv b_1 \pmod{m_1}$，$x \equiv b_2 \pmod{m_2}$ 的解是 $x \equiv c \pmod{[m_1, m_2]}$. 对任意 $3 \leqslant i \leqslant k$，易知

$$(m_1,m_i)\mid c-b_i,\qquad (m_2,m_i)\mid c-b_i,$$

故 $c-b_i$ 是 $[(m_1,m_i),(m_2,m_i)]$ 的倍数，从而 $c-b_i$ 被 $([m_1,m_2],m_i)$ 整除(参考习题 3.17). 因此由归纳假设知，同余方程组

$$x\equiv c\pmod{[m_1,m_2]},\cdots,x\equiv b_k\pmod{m_k}$$

可解；并且解是模 $[m_1,\cdots,m_k]$ 的一个同余类(§2，定理 4(ii)).

7. (i) 首先证明关于完系的结论：所说的数共有 $m_1\cdots m_k$ 个，且任两个模 $m_1\cdots m_k$ 不同余. 为了证明关于缩系的结论，现在只要证明，所说的数与 $m_1\cdots m_k$ 互素的充分必要条件是 $(x_i,m_i)=1\ (1\leqslant i\leqslant k)$.

9. 设 m' 是 m 的和 b 互素的最大因子. 如果 $m'=1$，则 m 的素因子都是 b 的素因子(注意并不能推出 $m\mid b$). 但 $(a,b)=1$，从而 $(a,m)=1$，结论显然成立. 如果 $m'>1$，由孙子定理，同余式组 $x\equiv a\pmod b$，$x\equiv 1\pmod{m'}$ 有解. 易证任一解 $x>0$ 与 m 互素. (m 的素因子或整除 m' 或整除 b.)

习 题 8

4. 设 g 是模 p 的原根，则 $g,g^2,\cdots,g^{p-1}$ 是模 p 的缩系.

5. 比较 §7，例 3.

6. (ii) 设 g 是模 p 的一个原根，则所说的和模 p 同余于 $\sum\limits_{d\mid p-1}\mu(d)S_d$，其中

$$S_d=\sum_{l=1}^{\frac{p-1}{d}}g^{dl}\text{(参考习题 6.9)}.$$

易知，当 $d\neq p-1$ 时，$S_d\equiv 0\pmod p$；而 $S_{p-1}\equiv 1\pmod p$.

7. a 模 a^n-1 的阶是 n.

8. 假设结论不对，设 $n>1$ 是满足 $n\mid 2^n-1$ 的最小整数. 设 2 模 n 的阶为 d，则 $1<d<n$. 由于 $d\mid n$，故 $2^d\equiv 1\pmod d$，这与 n 的最小性矛盾.(参考 §13，定理 2 的注记.)

10. 设 ab 模 m 的阶为 d,则 $a^d \cdot b^d \equiv 1 \pmod{m}$;可应用习题 8.9 及引理 3.

11. 用习题 8.10 及习题 2.6.

13. (i) 对 $a^p - 1$ 的任一素因子 q,考虑 a 模 q 的阶.

14. (i) 对 F_n 的任一素因子 p,证明 2 模 p 的阶是 2^{n+1};

(ii) $F_n(n \geqslant 1)$ 两两互素.

习　题　9

6. $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ 仅有一个解.

习　题　10

3. (i) $x^2 + 1$ 的素因子或者是 2 或者模 4 同余于 1;

(ii) $x^2 + 2$ 的素因子或者为 2 或者模 8 同余于 1,3. 由此可证明有无穷多个 $8n + 3$ 形式的素数(参考 §3,定理 1 的证明). 其余的结论可采用类似的想法证明.

4. 设所说的素数只有有限个,其全体为 $p_1, \cdots, p_k$. 取 n 使 $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$. 由孙子定理,同余式组

$$x \equiv n \pmod{p}, \quad x \equiv 1 \pmod{p_i} \ (1 \leqslant i \leqslant k)$$

有解. x 必有一个素因子 q,使 $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ 且 q 不同于 $p_1, \cdots, p_k$.

6. 如 q 是素数,则 $q \equiv 7 \pmod{8}$,从而 $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$. 由欧拉判别法知 $q \mid M_p$. 反过来,考虑 2 模 q 的阶,证明 $\varphi(q) = q - 1$,从而 q 是素数.

7. 可以用模 p 的原根证明,也可用 §5,例 1 中的配对法.

8. (i) 和(ii). 注意,若 a 是模 p 的二次剩余,则 $p - a$ 也是模 p 的

二次剩余；

(iii) 对 $1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$，由带余除法，$k^2 = p\left[\frac{k^2}{p}\right] + r_k$（习题 1.8），$r_k$ 是模 p 的二次剩余.

9. (i) 用习题 10.8(iii) 的解法.

10. 对 $1 \leqslant x \leqslant p-1$，有 x^{-1} 使 $xx^{-1} \equiv 1 \pmod p$. 因此所说的和等于

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x^2+ax}{p}\right)\left(\frac{x^{-2}}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{1+ax^{-1}}{p}\right) = -1.$$

11. (i) 甚为容易. 为证明(ii)，作代换 $u = x+y$，$v = x-y$，则数对 (u,v) 和 (x,y)（模 p）一一对应，得到 $uv \equiv a \pmod p$. 如果 $p \mid a$，则解数是 $p+p-1 = 2p-1$；如果 $p \nmid a$，任取 $u(1 \leqslant u \leqslant p-1)$，则模 p 唯一地确定 v，从而解数是 $p-1$.

12. 习题 10.11 中同余式的解数可表示为

$$\sum_{y=0}^{p-1}\left(1+\left(\frac{a+y^2}{p}\right)\right).$$

13. 用习题 10.12.

14. 必要性是显然的. 充分性可对 k 归纳来证明.

习　题　11

1. 用高斯引理中的记号，容易看出

$$\mu = \frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right].$$

3. (i) $p \equiv 1 \pmod 6$；(ii) $p \equiv \pm 1 \pmod 5$.

4. 利用习题 11.3(i).

5. 对 a 的任一素约数 q，证明 $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.（如 $a = \pm 1$ 结论显然成立.）

7. 证明模 p 的二次非剩余都是模 p 的原根；又

$$\frac{p-1}{2}=2^{n-1}=\varphi(p-1).$$

习　题　12

2. 用习题 4.3(ii).

3. (i) 模 3,推出 x,y,z 都被 3 整除,以 $x=3x_1,y=3y_1,z=3z_1$ 代入方程,重复这一手续可见,x,y,z 被 3 的任意正整数次幂除尽,故都是零.

本题也可采用下面不同形式的处理:问题中的方程是所谓的齐次方程,如果方程有非平凡整数解,可取一组满足$(x,y,z)=1$的解.(参考 §25,定理 1.) 然后如上那样导出 $3|(x,y,z)$,矛盾.

4. 将方程看作 x 的一元二次方程,先寻求它有实数解的条件.

6. 不难验证,$(m,n)=(1,1)$ $(3,3)$ 都是解.在方程有解时,通常,仅用同余不能求出所有解(除非问题非常特殊,如习题 12.3),而需结合其他方法.本题中,用同余可以证明,当 $m\geqslant 5$ 时,方程无解.因此解可通过逐一检验 $m=1,2,3,4$ 求得.

习　题　13

1. 设正整数 x,y 使 $x(x+1)=y^2$.两边乘 4,方程可分解为

$$(2x+2y+1)(2x-2y+1)=1.$$

由此得出 $x=1,y=0$,矛盾.

处理不定方程,分解是最为基本的出发点.上面的分解基于代数式的分解.应用整数的性质也能产生适用的分解:因$(x,x+1)=1$,故 x,$x+1$ 必须都是完全平方(习题 2.8),即 $x=u^2,x+1=v^2$.因此 $v^2-u^2=1$,推出 $v=1,u=0$.(比较习题 3.11 的解答.)

2. x 显然是奇数.在 y 为奇数时,方程可分解;并且导出此时无解.

当 y 为偶数时，x^y 是奇数的平方，模 4 表明方程也无解.

3. 方程有解 $x=3, y=2, z=3$. 显然 x 应是奇数，将方程变形为

$$(x-1)(x^{y-1}+\cdots+x+1)=2^z.$$

在 y 为奇数时，方程无解. 当 y 为偶数时，设 $y=2y_1$，方程分解为

$$(x^{y_1}-1)(x^{y_1}+1)=2^z.$$

故 $x^{y_1}-1$ 与 $x^{y_1}+1$ 都是 2 的方幂，又它们的最大公约数为 2，因此 $x^{y_1}-1=2$，得出 $x=3, y_1=1$（即 $y=2$），进而 $z=3$.

当 y 为偶数时，也可采用不同的处理：因 x^{y_1} 是奇数，设为 $2k+1$，则 $x^y=4k(k+1)+1$. 方程成为

$$k(k+1)=2^{z-2}.$$

在 $k>1$ 时，k 和 $k+1$ 中必有一个是大于 1 的奇数，故有奇素因子. 因此必须 $k=1$.

4. 设 $2^m+3^n=x^2$. 显然 x 不被 2 和 3 整除. 模 3，方程化为 $(-1)^m\equiv 1 \pmod 3$. 故 m 是偶数.（这一手续，可看作在 $\mathbf{Z}_3$ 上将原方程消元.）再模 4 知 n 是偶数.

6. 将有理点中两个坐标的分母化为相同，问题等价于确定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的所有整数解.

7. 可由定理 2 推出来.

8. 对直角三角形的面积递降.

习　题　14

2. (i) n 是两整数的平方差的充分必要条件是 n 为奇数，或 n 被 4 整除.

5. 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是互不相同的素数，均模 4 同于 3. 由孙子定理，同余方程组

$$x\equiv -p_i-i \pmod{p_i^2}\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

有正整数解. 显然 $p_i \| (x+i)$. 由定理 2 知, $x+1, \cdots, x+n$ 都不能表示为两个整数的平方和.

习　题　15

1. 比较习题 1.1.

3. 对指数作欧氏算法. 比较习题 2.4.

5. 比较习题 2.5.

6. 显然, x^3 与 $(1-x)^2$ 互素, 故所说的 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 必然存在. 由习题 15.5, 可设

$$\alpha(x) = a_1x + a_0, \quad \beta(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

比较等式两边同次幂的系数, 可确定待定的常数 a_i 和 b_j.

7. 比较习题 1.9.

8. 参考 §2, 定理 4.

9. (i) 因 $\mathbf{Z}_m$ 是一个交换环(参考 §5).

(ii) 如 $m > 1$ 且不是素数, 则 $\mathbf{Z}_m$ 中有零因子.

(iii) 设 $\bar{k}$ 是 $\mathbf{Z}_m$ 中一个零因子, 可取 $f(x) = x^m$, $g(x) = \bar{k}x^n$, 其中 $m > n > 0$. 试比较定理 3 在 $K = \mathbf{F}_p$ 的情形.

习　题　16

1. 比较习题 3.2.

2. 参考 §3, 定理 3 的推论 1 与推论 2.

3. (i) 用习题 15.5; (ii) 反复用(i); (iii) 用习题 15.7.

4. 由习题 16.3(从理论上) 可知所求表示式的形式, 为了实际地确定它们, 可应用待定系数法(将所作的等式化为多项式等式, 并比较两边同次幂的系数; 用 §17 中的代值法计算则更为简单).

习　题　17

3. 用定理 1.

4. 由本题可有效地确定一个整系数多项式的所有有理根，因为 a_n 与 a_0 的约数只有有限多个. 此外，本题还提供了证明一个复数为整数的基本出发点：首先证明它是一个有理数；再证明它是一个首项系数为 1 的整系数多项式的根.

5. 用定理 2 的推论 2.

6. (i) 是显然的；(ii) 用习题 5.7.

9. (i) 连续 k 个整数之积被 $k!$ 整除；

(ii) 熟知，当 x 为整数时，所说的等式成立，因此它是一个恒等式（参考定理 2 的推论 3）. 这是证明多项式恒等式一种很基本的手法；

(iii) 用带余除法，任一个 n 次复系数多项式 $f(x)$ 均可表示为所说的形式（在 §15，定理 3 中取 $g(x)=\binom{x}{n}$）. 如 $f(x)$ 是整值多项式，特别地，$f(0),(1),\cdots,f(n)$ 均是整数，由此逐次地推出 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为整数；

(iv) 可假定连续 $n+1$ 个整数为 $0,1,\cdots,n$（为什么?），用 (iii) 即得出结果.

习　题　18

1. 参考 §4，定理 4.

4. 可以用拉格朗日插值公式，也可采用下面的方法：$n+1$ 次多项式 $g(x)=xf(x)-1$ 在 $x=1,2,\cdots,n+1$ 处为零；又 $g(0)=-1$. 由 §17，定理 2 可确定 $g(x)$.

5. 可以用拉格朗日插值公式，也可用下面的方法：

$$g(x) = 2\left(\binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \cdots + \binom{x-1}{n}\right)$$

是一个 n 次多项式，且

$$g(k) = 2^k (1 \leqslant k \leqslant n+1).$$

因此

$$g(x) - f(x) = 0 (\text{参考 §17，定理 2 的推论 2}).$$

现在易知

$$f(n+2) = 2^{n+2} - 2.$$

6. 这是拉格朗日定理的推论. 也可采用下面的方法(参考定理 4 的证明)：对每个 $\alpha \in \mathbf{F}_p$，存在 $f_\alpha(x) \in \mathbf{F}_p[x]$，使得 $f_\alpha(\alpha) = \bar{1}$，而

$$f_\alpha(x) = \bar{0} (\text{对 } x \in \mathbf{F}_p, x \neq \alpha).$$

事实上，可取

$$f_\alpha(x) = \bar{1} - (x-\alpha)^{p-1}.$$

于是

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{F}_p} \varphi(\alpha) f_\alpha(x)$$

符合要求. 本题表明，$\mathbf{F}_p$ 到自身的映射仅有多项式映射.

7. 显然 $f(x)$ 是唯一确定的，它可用习题18.6的解法求出来. 更简单的做法是利用费马定理(习题 6.7) 而得出 $f(x) = x^{p-2}$.

8. 用拉格朗日定理.

习　题　19

2. 如 $f(x) \geqslant 0$(对所有实数 x)，则在 $f(x)$ 的标准分解中，一次不可约因式的幂次都是偶数；又二次不可约多项式 $x^2 + ax + b$ 可表示为 $(x+c)^2 + d^2$(c, d 均是实数). 用 §14 中恒等式(2).

4. 若 $Re(\alpha) \leqslant 0$，或 $|\alpha| \leqslant 1$，则已无需证明. 对于 $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ 且 $|\alpha| > 1$，我们有 $Re\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$. 故从

$$0=\left|\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right|\geqslant\left|a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right|-\frac{a_2}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{a_n}{|\alpha|^n}$$
$$\geqslant Re\left(a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right)-\frac{9}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{9}{|\alpha|^n}$$
$$>1-\frac{9}{|\alpha|^2-|\alpha|},$$

可导出结论.

习 题 20

1. 条件意味着 $f(1)=0$. 若 ζ 是任一 n 次单位根,则有 $f(\zeta^n)=0$,因此 $f(x^n)$ 有因式 $x-\zeta$. 这些因式互不相同,积是 x^n-1.

3. 本题给出了特征函数

$$f(n)=\begin{cases}0, & 如\ m\nmid n\\ 1, & 如\ m\mid n\end{cases}$$

的一个解析表达式.

4. 用习题 20.3.

5. (i) 用韦达定理,所求的和是 0,积是 $(-1)^{n-1}$;

(ii) 和是 $\mu(n)$,积是 1. 参考并比较习题 8.6.

习 题 21

1. (ii) 分别用 $c(f)^{-1}f$ 和 $c(g)^{-1}g$ 代替 f 和 g; 用高斯引理及(i).

2. 设 d 是一个整数,使 $dg(x)$ 为整系数. 则由 $d\cdot f(x)g(x)=f(x)\cdot dg(x)$ 及习题 21.1 知,$d\mid c(f)\cdot c(dg)$. 因由假设 $c(f)=1$,故 $d\mid c(dg)$. 因此 $g(x)$ 的系数必须都是整数.

3. 用定理 1.

4. (i) 是显然的; (ii) 如有整系数多项式 $d(x)$ 使 $J=(d(x))$,则

特别地，有整数 a,b 使 $x = ad(x), 2 = bd(x)$，易导出矛盾.

习　题　22

2. (i) 记所说的多项式为 $f(x)$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，等价于 $g(x) = f(x+1)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 用定理 1 及 § 6 中的引理；

(ii) 比较习题 3.8.

3. 记所说的多项式为 $f(x)$，设

$$f(x) = g(x)h(x), g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x],$$

且 $\deg g, \deg h \geqslant 1$. 用 § 17，定理 2 的推论 2 证明 $g(x) = -h(x)$.

4. 记所说的多项式为 $f(x)$，设

$$f(x) = g(x)h(x), g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x],$$

且 $\deg g, \deg h \geqslant 1$. 一方面，$g(10)$ 是素数；另一方面，由 $f(x)$ 的根的性质可推出 $|g(10)| > 1$（参考习题 19.1，习题 19.4）. 同样 $|h(10)|$ 是大于 1 的整数. 产生矛盾.

5. 参考习题 17.1.

习　题　23

2. 由定理 1 及墨比乌斯反转公式（习题 6.10）.

3. 不难直接证明；也可用习题 23.1 中的恒等式 (ii) 和 (iii) 来证明.

4. 用习题 23.2 不难证明，模 p 的任一个 n 阶元都是所说的同余式的解；又解数不能超过 $\varphi(n)$（§ 7，定理 2），结合 § 8，定理 4 的第二个断言即得出证明.

习　题　24

1. (i) 容易得知，如果 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上可约，则它必分解为 $(ax_1+bx_2+cx_3)(Ax_1+Bx_2+Cx_3)$ 的形式(参考 §25，定理 2). 取 x_1,x_2,x_3 适当的特殊值易导出矛盾. 此外，简单的配方表明，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 在 $\mathbf{R}$ 上的不可约性可由前一个结论推出来.

2. 当 $x_1=0$ 及 $x_2=0$ 时，多项式为零，所以能被 x_1x_2 整除；如果 $x_1=\omega x_2$ 及 $x_1=\omega^2x_2$(ω 是三次单位根，且 $\omega\neq 1$)，则所说的多项式也均为零，故能被 $(x_1-\omega x_2)(x_1-\omega^2x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ 整除(参考定理 3).

3. 用定理 4 和定理 1.

4. 对 n 归纳(参考 §17，定理 2 的推论 3).

5. 对 n 归纳(参考 §17，定理 2 的推论 2).

习　题　25

2. 证明必要性时只需对 k 次单项式证明就够了(习题 25.1(i))；为证明充分性可参考定理 1 的证明.

3. 参考例 1 及习题 24.2.

4. (ii) 当 $x_1=-x_2$ 时多项式为零.

5. 设 $F(x_1,x_2)=(x_1-x_2)G(x_1,x_2)$，则 $G(x_1,x_2)+G(x_2,x_1)=0$，因此 $G(x_1,x_1)=0$. 故 x_1-x_2 是 $G(x_1,x_2)$ 的一个因式.

6. 设 F_k 是 F 的一个 k 次齐次部分. 对于 F_k 中任一单项式，任意交换其两个不定元后所得的单项式必在 F 中出现，因它是 k 次的，故它实际上属于 F_k.

习　题　26

1. (iii) 可先将多项式表示为齐次式的和(参考习题 25.6).

3. σ_n 可约,而 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ 不可约. 注意 σ_i 关于每个 $x_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 都是一次的.

4. 用 §19,定理 2.

5. 对 $i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$x_i^n-\sigma_1x_i^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0.$$

将上式乘以 x_i^{k-n},并对 i 求和,即得 $k\geqslant n$ 时的结果.

为了证明当 $1\leqslant k<n$ 时有

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0. \tag{1}$$

我们注意,前面的结果表明,当 $x_1,\cdots,x_n$ 中有 $n-k$ 个等于零时,(1)式成立. 设 $n>l\geqslant k$,并设(1)在 $x_1,\cdots,x_n$ 中有 $n-l$ 个为零时成立. 下面考虑 $x_1,\cdots,x_n$ 中有 $n-l-1$ 个为零的情况;无妨设 $x_{l+2},\cdots,x_n$ 为零.

由归纳假设,在 $x_1,\cdots,x_{l+1}$ 中任一个为零时,(1)的左边为零,因而(1)的左边被 $l+1$ 次多项式 $x_1\cdots x_{l+1}$ 整除(§24,定理 3). 因此(1)的左边必是零;否则它是一个次数 $\leqslant k(<l+1)$ 的多项式. 故在这种情况下(1)仍成立,这就归纳证明了(1).

6. 对 k 归纳(用习题 26.5).

7. 这是定理 1 的平凡推论. 用牛顿公式及归纳法也可得出证明,并能递推地求 s_n 的值.